SEMAINE DU 11 AU 17 DÉCEMBRE

ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS RELATIFS

— Divisibilité et congruence. Propriétés usuelles en tant que relations binaires. Compatibilité avec l'addition et la multiplication.

— Nombres premiers. Existence de la factorisation première. Infinité de l'ensemble des nombres premiers. Crible d'Ératosthène.

— Théorème de la division euclidienne. Algorithme associé.

— PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide et : $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(a \wedge b)$. Relations de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. Associativité du PGCD, factorisation par un diviseur commun.

— PGCD d'une famille finie d'entiers. Extension des résultats précédents.

— Couple d'entiers premiers entre eux, entiers premiers entre eux dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. Si des entiers sont premiers avec n, alors leur produit l'est aussi. Si des entiers sont premiers entre eux deux à deux et divisent n, alors leur produit divise n. Forme irréductible d'un rationnel.

— PPCM de deux entiers relatifs. Lien avec le PGCD et : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$.

— Valuations p-adiques, lien avec la divisibilité, les PGCD et les PPCM. Unicité de la factorisation première.

— Petit théorème de Fermat.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Existence de la factorisation première — pas l'unicité ! — **ET** infinité de l'ensemble des nombres premiers.

— Théorème de la division euclidienne — existence **ET** unicité.

— Théorème de Bézout en admettant l'existence d'une relation de Bézout : $a \wedge b = au + bv$ **ET** théorème de Gauss.

— Petit théorème de Fermat.

— **(TD)** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $k \geqslant 2$ avec : $a \wedge b = 1$. Si ab est la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un entier, a et b sont eux-mêmes des puissances $k^{\text{èmes}}$ d'entiers.

— Le produit matriciel est associatif **ET** le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.