Semaine du 13 au 19 décembre

Arithmétique des entiers relatifs

— Divisibilité et congruence en tant que relations binaires. Compatibilité avec l'addition et la multiplication.

— Nombres premiers. Existence de la factorisation première. Infinité de l'ensemble des nombres premiers. Crible d'Ératosthène.

— Théorème de la division euclidienne. Algorithme associé.

— PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide et : $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(a \wedge b)$. Relations de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. Associativité du PGCD, factorisation par un diviseur commun.

— PGCD d'une famille finie d'entiers. Extension des résultats précédents.

— Couple d'entiers premiers entre eux, entiers premiers entre eux dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. Lemme d'Euclide. Si des entiers sont premiers avec n, leur produit l'est aussi. Si des entiers sont premiers entre eux deux à deux et divisent n, leur produit divise n. Forme irréductible d'un rationnel.

— PPCM de deux entiers relatifs. Lien avec le PGCD et : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$.

— Valuations p-adiques, lien avec la divisibilité, les PGCD et les PPCM. Unicité de la factorisation première.

— Petit théorème de Fermat.

Matrices et systèmes linéaires

— Matrice, coefficients, lignes, colonnes. Addition matricielle et multiplication par un scalaire. Matrices élémentaires.

— Produit matriciel. Associativité, bilinéarité, matrice identité. Formule du binôme, formule $A^k - B^k$. Produit par blocs.

— Transposée. Linéarité, involutivité, effet sur un produit. Matrice symétrique/antisymétrique.

— Matrices diagonales et triangulaires. Stabilité par combinaison linéaire et produit.

— Trace d'une matrice carrée. Linéarité, effet sur un produit.

Questions de cours de début d'heure

— Si a et b sont premiers avec n, alors ab aussi. + Si a et b divisent n et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise n.

— Petit théorème de Fermat.

— **(TD)** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $k \geqslant 2$. Si ab est la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un entier, a et b sont eux-mêmes des puissances $k^{\text{èmes}}$ d'entiers.

— Formule $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. + Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.