

SEMAINE DU 8 AU 14 JANVIER

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

- Matrice, coefficients, lignes, colonnes. Addition matricielle et multiplication par un scalaire.
- Produit matriciel. Associativité, bilinéarité, matrice identité. Formule du binôme, formule « $A^k - B^k$ ». Produit par blocs.
- Transposée. Linéarité, involutivité, effet sur un produit. Matrice symétrique/antisymétrique.
- Matrices diagonales et triangulaires. Stabilité par combinaison linéaire et produit.
- Trace d'une matrice carrée. Linéarité, effet sur un produit.
- Représentation matricielle d'un système linéaire. Système linéaire compatible, principe « solution particulière de l'équation complète + solution générale de l'équation homogène ». Notation Vect dans \mathbb{K}^n . Interprétation géométrique d'un Vect, équations cartésiennes d'une droite dans un plan, d'un plan dans l'espace.
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un système linéaire. Algorithme du pivot.
- Matrice inversible, inverse, groupe linéaire. Solution d'un système de Cramer. Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires. Application à l'inversion grâce à l'algorithme du pivot.
- Inversibilité et inversion des matrices carrées de taille 2. Formules de Cramer pour les systèmes linéaires de taille 2×2 .
- Opérations sur les matrices inversibles — inverse, produit, puissances, transposée. Interprétation des opérations élémentaires comme produit par des matrices inversibles. Application à l'inversion grâce à l'algorithme du pivot.
- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire de même type.

STRUCTURES DE GROUPE ET D'ANNEAU

- **Loi (de composition) interne** : Magma. Associativité. Commutativité. Élément neutre et éléments inversibles (dans les magmas associatifs). Distributivité. Partie stable par une loi interne.
- **Structure de groupe** :
 - Groupe. Groupe symétrique S_E d'un ensemble non vide E .
 - Sous-groupe. Caractérisation.
 - Groupe produit.
- **Structure d'anneau** :
 - Anneau, anneau commutatif. Règles usuelles de calcul. Formule du binôme et formule « $a^n - b^n$ » lorsque a et b commutent. Anneau intègre. Groupe $U(A)$ des inversibles d'un anneau A .
 - Sous-anneau. Caractérisation.
 - Corps.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires.
- Les matrices scalaires λI_n , λ décrivant \mathbb{K} , sont les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **(TD)** Théorème de Lagrange dans le cas d'un groupe commutatif fini et application à la détermination des sous-groupes finis de \mathbb{C}^* .
- **(Polynômes)** Formule de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
- **(Polynômes)** Degré du produit de deux polynômes.