SEMAINE DU 7 AU 13 JANVIER

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

— Matrice, coefficients, lignes, colonnes. Addition matricielle et multiplication par un scalaire.

— Produit matriciel. Associativité, bilinéarité, matrice identité. Formule du binôme, formule « $A^k - B^k$ ». Produit par blocs.

— Transposée. Linéarité, involutivité, effet sur un produit. Matrice symétrique/antisymétrique.

— Matrices diagonales et triangulaires. Stabilité par combinaison linéaire et produit.

— Trace d'une matrice carrée. Linéarité, effet sur un produit.

— Représentation matricielle d'un système linéaire. Système linéaire compatible, principe « solution particulière de l'équation complète + solution générale de l'équation homogène ». Notation Vect dans $\mathbb{K}^n$. Interprétation géométrique d'un Vect, équations cartésiennes d'une droite dans un plan, d'un plan dans l'espace.

— Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un système linéaire. Algorithme du pivot.

— Matrice inversible, inverse, groupe linéaire. Solution d'un système de Cramer. Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires. Application à l'inversion grâce à l'algorithme du pivot.

— Inversibilité et inversion des matrices carrées de taille 2. Formules de Cramer pour les systèmes linéaires de taille 2×2.

— Opérations sur les matrices inversibles — inverse, produit, puissances, transposée. Interprétation des opérations élémentaires comme produit par des matrices inversibles. Application à l'inversion grâce à l'algorithme du pivot.

— Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire de même type.

STRUCTURES DE GROUPE ET D'ANNEAU

— **Loi (de composition) interne :** Magma. Associativité. Commutativité. Elément neutre et éléments inversibles (dans les magmas associatifs). Distributivité. Partie stable par une loi interne.

— **Structure de groupe :**

⟶ Groupe. Groupe symétrique S_E d'un ensemble non vide E.

⟶ Sous-groupe. Caractérisation.

⟶ Groupe produit.

— **Structure d'anneau :**

⟶ Anneau, anneau commutatif. Règles usuelles de calcul. Formule du binôme et formule « $a^n - b^n$ » lorsque a et b commutent. Anneau intègre. Groupe $\mathrm{U}(A)$ des inversibles d'un anneau A.

⟶ Sous-anneau. Caractérisation.

⟶ Corps.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires.

— Les matrices scalaires λI_n, λ décrivant $\mathbb{K}$, sont les seules matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— **(TD)** Théorème de Lagrange dans le cas d'un groupe commutatif fini et application à la détermination des sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

— **(TD)** Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On ADMET que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— **(Polynômes)** Formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

— **(Polynômes)** Degré du produit de deux polynômes.