Semaine du 15 au 21 janvier

Polynômes

— **Construction des polynômes :** $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Identification polynomiale. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Somme, produit, composition, dérivation. Notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Évaluation polynomiale et fonction polynomiale.

— **Division polynomiale :** Relation de divisibilité. Théorème de la division euclidienne et algorithme associé.

— **Racines d'un polynôme :**

$\longrightarrow$ $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise P. Racine, multiplicité. Formule de Taylor polynomiale et formule « $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ ». Utilisation des polynômes dérivés successifs pour le calcul d'une multiplicité. Racines complexes d'un polynôme réel.

$\longrightarrow$ Factorisation « par les racines ». Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité. Identification polynôme/fonction polynomiale.

$\longrightarrow$ Polynôme scindé. Relations coefficients-racines.

— **Polynômes annulateurs d'une matrice carrée :** Utilisation pour l'inversion et le calcul de puissances.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange :** Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts. Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal, puis cas général.

Questions de cours de début d'heure

— **(TD)** Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement les ensembles $n\mathbb{Z}$, n décrivant $\mathbb{N}$. On **admet** que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

— Existence de la division euclidienne.

— Formule de Taylor polynomiale.

— Définition des polynômes de Lagrange. + Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal.

— **(TD)** Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. Toute racine rationnelle de P est un entier.