SEMAINE DU 21 AU 27 JANVIER

POLYNÔMES

— **Construction des polynômes :** $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Identification polynomiale. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Somme, produit, composition, dérivation. Notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Évaluation polynomiale et fonction polynomiale.

— **Division polynomiale :** Relation de divisibilité. Théorème de la division euclidienne et algorithme associé.

— **Racines d'un polynôme :**

⟶ $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise P. Racine, multiplicité. Formule de Taylor polynomiale et formule « $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ ». Utilisation des polynômes dérivés successifs pour le calcul d'une multiplicité. Racines complexes d'un polynôme réel.

⟶ Factorisation « par les racines ». Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité. Identification polynôme/fonction polynomiale.

⟶ Polynôme scindé. Relations coefficients-racines.

— **Polynômes annulateurs d'une matrice carrée :** Utilisation pour l'inversion et le calcul de puissances.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange :** Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts. Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal, puis cas général.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

— Espace vectoriel (réel ou complexe). Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs. Généralisation au cas d'un nombre infini de vecteurs.

— Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple fondamental des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.

— Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple fondamental des systèmes linéaires. Intersection de sous-espaces affines.

— Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

— Partie/famille génératrice. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

— Partie/famille libre/liée. Propriétés : inclusion, ajout/suppression.

— Base, coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Définition des polynômes de Lagrange. + Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal.

— **(TD)** Simplifier : $\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts avec $n \geqslant 2$ et où $L_1, \ldots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange de $x_1, \ldots, x_n$.

— Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient **NON NUL** sur a : $\mathrm{Vect}\big(X \cup \{a\}\big) = \mathrm{Vect}\big(X \cup \{b\}\big)$.

— Si X est libre et si $y \in E$ **N'**est **PAS** combinaison linéaire de X, alors $X \cup \{y\}$ est libre.

— Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et de certains des vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.