

SEMAINE DU 22 AU 28 JANVIER

POLYNÔMES

- **Construction des polynômes** : $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans \mathbb{K} . Identification polynomiale. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Somme, produit, composition, dérivation. Notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Évaluation polynomiale et fonction polynomiale.
- **Division polynomiale** : Relation de divisibilité. Théorème de la division euclidienne et algorithme associé.
- **Racines d'un polynôme** :
 - $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise P . Racine, multiplicité. Formule de Taylor polynomiale et formule « $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ ». Utilisation des polynômes dérivés successifs pour le calcul d'une multiplicité. Racines complexes d'un polynôme réel.
 - Factorisation « par les racines ». Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité. Identification polynôme/fonction polynomiale.
 - Polynôme scindé. Relations coefficients-racines.
- **Polynômes annulateurs d'une matrice carrée** : Utilisation pour l'inversion et le calcul de puissances.
- **Polynômes d'interpolation de Lagrange** : Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts. Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal, puis cas général.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

- Espace vectoriel (réel ou complexe). Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont \mathbb{K}^n , espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs. Généralisation au cas d'un nombre infini de vecteurs.
- Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple fondamental des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.
- Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple fondamental des systèmes linéaires. Intersection de sous-espaces affines.
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.
- Partie/famille génératrice. Propriétés : inclusion, suppression.
- Partie/famille libre/liée. Propriétés : inclusion, ajout/suppression.
- Base, coordonnées. Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- (TD) Simplifier : $\sum_{i=1}^n L_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i L_i$ où x_1, \dots, x_n sont des éléments de \mathbb{K} distincts avec $n \geq 2$ et où L_1, \dots, L_n sont les polynômes de Lagrange de x_1, \dots, x_n .
- Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient **NON NUL** sur a : $\text{Vect}(X \cup \{a\}) = \text{Vect}(X \cup \{b\})$.
- Si X est libre et si $y \in E$ n'est **PAS** combinaison linéaire de X , alors $X \cup \{y\}$ est libre.
- Soient $E \neq \{0_E\}$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs x_1, \dots, x_p et de certains des vecteurs x_{p+1}, \dots, x_n .