SEMAINE DU 17 AU 23 JANVIER

STRUCTURES DE GROUPE ET D'ANNEAU

— **Loi (de composition) interne :** Magma. Associativité. Commutativité. Elément neutre et éléments inversibles (dans les magmas associatifs). Distributivité. Partie stable par une loi interne.

— **Structure de groupe :**

⟶ Groupe. Groupe symétrique S_E d'un ensemble non vide E. Groupe produit.

⟶ Sous-groupe. Caractérisation.

⟶ Morphisme de groupes, isomorphisme de groupes. Composée, réciproque. Image directe/réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes. Image/noyau d'un morphisme de groupes, caractérisation de la surjectivité/injectivité. Groupe des automorphismes d'un groupe.

— **Structure d'anneau :**

⟶ Anneau, anneau commutatif. Règles usuelles de calcul. Formule du binôme et formule $a^n - b^n$ lorsque a et b commutent. Anneau intègre. Groupe $\mathrm{U}(A)$ des inversibles d'un anneau A.

⟶ Sous-anneau. Caractérisation.

⟶ Corps.

⟶ Morphisme d'anneaux, isomorphisme d'anneaux.

POLYNÔMES

— **Construction des polynômes :** $\mathbb{K}[X]$ a été construit comme l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Somme, produit, composition, dérivation. Notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Évaluation polynomiale et fonction polynomiale.

— **Division polynomiale :** Relation de divisibilité. Théorème de la division euclidienne et algorithme associé.

— **Racines d'un polynôme :**

⟶ $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise P. Racine, multiplicité. Formule de Taylor polynomiale et formule $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Utilisation des polynômes dérivés successifs pour le calcul d'une multiplicité. Multiplicité d'un nombre complexe et de son conjugué pour un polynôme réel.

⟶ Factorisation « par les racines ». Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité. Identification polynôme/fonction polynomiale.

⟶ Polynôme scindé. Théorème de d'Alembert-Gauss. Relations coefficients-racines.

— **Polynômes annulateurs d'une matrice carrée :** Utilisation pour l'inversion et le calcul de puissances.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange :** Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts. Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal, puis cas général.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Formule de Taylor polynomiale.

— λ est de multiplicité m dans P si et seulement si $P^{(i)}(\lambda) = 0$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$ mais $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

— Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal.