Semaine du 28 janvier au 3 février

Structure d'espace vectoriel

— Espace vectoriel (réel ou complexe). Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs. Généralisation au cas d'un nombre infini de vecteurs.

— Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple fondamental des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.

— Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple fondamental des systèmes linéaires. Intersection de sous-espaces affines.

— Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

— Partie/famille génératrice. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

— Partie/famille libre/liée. Propriétés : inclusion, ajout/suppression.

— Base, coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Espace vectoriel de dimension finie. Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute partie libre possède au plus n éléments. Algorithme de la base incomplète. Théorème de la base incomplète/extraite.

— Dimension d'un espace vectoriel. En dimension n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n. En dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. Rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation de la liberté. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité. Dimension d'un espace vectoriel produit.

— Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie. Interprétation vectorielle de l'inversibilité. Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes.

— Somme de deux sous-espaces vectoriels. Parties génératrices. Formule de Grassmann. Condition suffisante pour que deux sous-espaces affines soient concourants.

— Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation. Dimension. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

— Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Questions de cours de début d'heure

— Dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ — on n'attend pas ici une preuve formellement parfaite de la liberté.

— Dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.

— L'espace vectoriel $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'espace vectoriel $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ — preuve par analyse-synthèse.

— **(TD)** Dimension de : $\left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / \quad \mathrm{tr}(M) = 0\right\}$ — on n'attend pas ici une preuve formellement parfaite de la liberté.

— **(TD)** Toute matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur non nul — de degré inférieur ou égal à n^2 par un argument de dimension.