

SEMAINE DU 29 JANVIER AU 4 FÉVRIER

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

- Espace vectoriel (réel ou complexe). Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont \mathbb{K}^n , espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs. Généralisation au cas d'un nombre infini de vecteurs.
- Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple fondamental des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.
- Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple fondamental des systèmes linéaires. Intersection de sous-espaces affines.
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.
- Partie/famille génératrice. Propriétés : inclusion, suppression.
- Partie/famille libre/liée. Propriétés : inclusion, ajout/suppression.
- Base, coordonnées. Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Espace vectoriel de dimension finie. Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute partie libre possède au plus n éléments. Algorithme de la base incomplète. Théorème de la base incomplète/extraite.
- Dimension d'un espace vectoriel. En dimension n , toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n . En dimension n , une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. Rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation de la liberté. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité. Dimension d'un espace vectoriel produit.
- Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie. Interprétation vectorielle de l'inversibilité. Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels. Parties génératrices. Formule de Grassmann. Condition suffisante pour que deux sous-espaces affines soient concourants.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation. Dimension. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- **(Algorithme de la base incomplète)** Soient $E \neq \{0_E\}$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs x_1, \dots, x_p et de certains des vecteurs x_{p+1}, \dots, x_n .
- Dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ — on n'attend pas ici une preuve formellement parfaite de la liberté.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.
- **(TD)** Dimension de : $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$ — on n'attend pas ici une preuve formellement parfaite de la liberté.
- **(TD)** L'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.