SEMAINE 15 DU 23 AU 29 JANVIER

POLYNÔMES

— **Construction des polynômes :** $\mathbb{K}[X]$ a été construit comme l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Somme, produit, composition, dérivation. Notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Évaluation polynomiale et fonction polynomiale.

— **Division polynomiale :** Relation de divisibilité. Théorème de la division euclidienne et algorithme associé.

— **Racines d'un polynôme :**

⟶ $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise P. Racine, multiplicité. Formule de Taylor polynomiale et formule $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Utilisation des polynômes dérivés successifs pour le calcul d'une multiplicité. Multiplicité d'un nombre complexe et de son conjugué pour un polynôme réel.

⟶ Factorisation « par les racines ». Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité. Identification polynôme/fonction polynomiale.

⟶ Polynôme scindé. Théorème de d'Alembert-Gauss. Relations coefficients-racines.

— **Polynômes annulateurs d'une matrice carrée :** Utilisation pour l'inversion et le calcul de puissances.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange :** Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts. Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

— Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

— Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.

— Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple des systèmes linéaires compatibles. Intersection de sous-espaces affines.

— Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— λ est de multiplicité m dans P si et seulement si $P^{(i)}(\lambda) = 0$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$ mais $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

— Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal.

— Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a : $\quad \mathrm{Vect}\big(X \cup \{a\}\big) = \mathrm{Vect}\big(X \cup \{b\}\big)$.