SEMAINE 16 DU 30 JANVIER AU 5 FÉVRIER

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

— Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Exemples fondamentaux : espaces vectoriels produits dont $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, espaces vectoriels de fonctions dont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

— Sous-espace vectoriel, caractérisation. Exemple des systèmes linéaires homogènes. Intersection de sous-espaces vectoriels.

— Sous-espace affine, direction, caractérisation par la direction et un point. Exemple des systèmes linéaires compatibles. Intersection de sous-espaces affines.

— Sous-espace vectoriel engendré par une partie. Propriétés : inclusion, suppression, substitution.

— Partie/famille génératrice. Propriétés : inclusion, suppression, substitution. Partie/famille libre/liée. Propriétés : inclusion, ajout, suppression. Base, coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes ou de ses lignes est une base de $\mathbb{K}^n$.

— Espace vectoriel de dimension finie. Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute partie libre possède au plus n éléments. Algorithme de la base incomplète. Théorème de la base incomplète/extraite. Dimension d'un espace vectoriel. En dimension n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n. En dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. Une matrice est inversible si et seulement elle est inversible à gauche ou à droite, si et seulement si le système linéaire homogène qui lui est associé admet le vecteur nul pour seule et unique solution. Rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation de la liberté. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité. Dimension d'un espace vectoriel produit.

— Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie. Interprétation vectorielle de l'inversibilité.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Alors E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et de certains des vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

— Dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ — liberté **ADMISE** pour ne pas perdre de temps.

— Dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.

— **(TD)** Toute matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur non nul par un argument de dimension.