Semaine du 11 au 17 février

Limites d'une fonction

— Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Unicité. Si $a \in D$: $\lim_a f = f(a)$. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.

— Limite à gauche/droite. Caractérisation de la limite en termes de limites à gauche et à droite.

— Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations sur les limites. Limites et inégalités strictes/larges.

— Théorèmes d'encadrement/de minoration/de majoration.

— Théorème de la limite monotone.

— Brève extension aux fonctions complexes.

Continuité

— Continuité en un point, sur une partie et à gauche/à droite en un point d'une fonction complexe. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Prolongement par continuité en un point. Opérations sur la continuité.

— Caractérisation séquentielle de la continuité. Équation fonctionnelle « $f(x+y) = f(x)+f(y)$ » des fonctions linéaires.

— Théorème des valeurs intermédiaires. Algorithme dichotomique associé. TVI strictement monotone.

— Théorème des bornes atteintes.

— Toute fonction continue injective sur un intervalle y est strictement monotone. Continuité d'une fonction réciproque.

Dérivabilité

— Dérivabilité en un point, sur une réunion finie d'intervalles et à gauche/à droite en un point. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Lien avec la continuité. Opérations sur les dérivées.

— Dérivées successives. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Opérations sur les dérivées successives.

— Extremum local, point critique. Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.

— Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.

— Constance, monotonie et signe de la dérivée.

— Lipschitzianité. Toute fonction lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis — si $|f'| \leqslant K$, alors f est K-lipschitzienne. Application à l'étude de certaines suites récurrentes.

Questions de cours de début d'heure

— **(TD)** Pour une fontion continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si : $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, alors f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

— Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.

— Théorème de Rolle — en admettant la condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.

— Théorèmes des accroissements finis — avec un dessin explicatif et en admettant le théorème de Rolle.

— Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ s'annule en au moins $k+1$ points, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point.