

# SEMAINE DU 12 AU 18 FÉVRIER

## LIMITES D'UNE FONCTION

- Limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $a \in \overline{D}$ . Unicité de la limite. Si  $a \in D$  :  $\lim_a f = f(a)$ . Si  $f$  possède une limite finie en  $a$ ,  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- Limite à gauche/droite. Caractérisation de la limite en termes de limites à gauche et à droite.
- Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations sur les limites. Limites et inégalités strictes/larges.
- Théorèmes d'encadrement/de minoration/de majoration.
- Théorème de la limite monotone.
- Brève extension aux fonctions complexes.

## CONTINUITÉ

- Continuité en un point, sur une réunion finie d'intervalles et à gauche/à droite en un point d'une fonction complexe. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Prolongement par continuité en un point. Opérations sur la continuité.
- Caractérisation séquentielle de la continuité. Équation fonctionnelle «  $f(x+y) = f(x)+f(y)$  » des fonctions linéaires.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Algorithme dichotomique associé. TVI strictement monotone.
- Théorème des bornes atteintes.
- Théorème de continuité d'une fonction réciproque.

## DÉRIVABILITÉ

- Dérivabilité en un point, sur une réunion finie d'intervalles et à gauche/à droite en un point. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Lien avec la continuité. Opérations sur les dérivées.
- Dérivées successives. Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Opérations sur les dérivées successives.
- Extremum local, point critique. Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
- Constance, monotonie et signe de la dérivée.
- Lipschitzianité. Toute fonction lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis — si  $|f'| \leq K$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne. Application à l'étude de certaines suites récurrentes.
- Théorème de la limite de la dérivée. Théorème du prolongement de classe  $\mathcal{C}^k$ .

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- **(TD)** Pour une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si :  $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$ , alors  $f$  possède un minimum sur  $\mathbb{R}$ .
- Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle — en admettant la condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
- Théorèmes des accroissements finis — avec un dessin explicatif et en admettant le théorème de Rolle.
- Si  $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$  s'annule en au moins  $k+1$  points, alors  $f^{(k)}$  s'annule en au moins un point.
- Théorème de la limite de la dérivée.