

SEMAINE DU 5 AU 11 MARS

DÉRIVABILITÉ

- Dérivabilité en un point, sur une réunion finie d'intervalles et à gauche/à droite en un point. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Lien avec la continuité. Opérations sur les dérivées.
- Dérivées successives. Fonction de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Opérations sur les dérivées successives.
- Extremum local, point critique. Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
- Constance, monotonie et signe de la dérivée.
- Lipschitzianité. Toute fonction lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis — si $|f'| \leq K$, alors f est K -lipschitzienne. Application à l'étude de certaines suites récurrentes.
- Théorème de la limite de la dérivée. Théorème du prolongement de classe \mathcal{C}^k .

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 1

- Négligeabilité (fonctions et suites). Croissances comparées usuelles. Limites finies et petits o . Opérations sur les petits o .
- Développements limités. Unicité des coefficients. On peut toujours se ramener à un développement limité au voisinage de 0. Troncature. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Cas des fonctions paires et impaires au voisinage de 0.
- Primitivation des développements limités. Formule de Taylor-Young. Dérivation des développements limités.
- Développements limités usuels au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, e^x , $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que $\tan x$ à l'ordre 3.
- Opérations sur les développements limités.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- **(TD)** Théorème de Rolle généralisé à l'intervalle $[0, +\infty[$ — preuve par composition à droite par une fonction adaptée.
- Lemme de primitivation des développements limités — pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$, si : $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, alors : $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$.
- **DEUX** développements limités usuels au voisinage de 0 à **ÉNONCER** et **DÉMONTRER** parmi les suivants :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \ln(1+x), \quad e^x, \quad (1+x)^\alpha, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{Arctan} x, \quad \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} x.$$