

SEMAINE 18 DU 13 AU 19 FÉVRIER

LIMITES D'UNE FONCTION

- Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . Unicité. Si f est définie en a , alors $\lim_a f = f(a)$. Si f possède une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a . Limite à gauche/droite. Caractérisation de la limite en termes de limites à gauche et à droite.
- Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations sur les limites. Limites et inégalités strictes/larges.
- Théorèmes d'encadrement/de minoration/de majoration. Théorème de la limite monotone.
- Brève extension aux fonctions complexes.

CONTINUITÉ

- Continuité en un point, sur une partie et à gauche/à droite en un point d'une fonction complexe. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Prolongement par continuité en un point. Opérations sur la continuité.
- Caractérisation séquentielle de la continuité. Endomorphismes continus du groupe \mathbb{R} .
- Théorème des valeurs intermédiaires. Version strictement monotone.
- Théorème des bornes atteintes. Norme infinie d'une fonction bornée, cas particulier d'une fonction continue sur un segment.
- Toute fonction continue injective sur un intervalle y est strictement monotone. Continuité d'une fonction réciproque.

DÉRIVABILITÉ

- Dérivabilité en un point, sur une partie et à gauche/à droite en un point d'une fonction complexe. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Lien avec la continuité. Opérations sur les dérivées.
- Dérivées successives. Fonction de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Opérations sur les dérivées successives.
- Extremum local, point critique. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
- Constance, monotonie et signe de la dérivée.
- Lipschitzianité. Toute fonction lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis — si f' est bornée, f est $\|f'\|_\infty$ -lipschitzienne. Application à l'étude de certaines suites récurrentes.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- **(TD)** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, alors f possède un minimum sur \mathbb{R} .
- Théorème de Rolle — en admettant la condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.
- Théorème des accroissements finis — avec un dessin explicatif et en admettant le théorème de Rolle.
- Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ s'annule en au moins $k + 1$ points, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point.