# SEMAINE 19 DU 6 AU 12 MARS

## DÉRIVABILITÉ

— Dérivabilité en un point, sur une partie et à gauche/à droite en un point d'une fonction complexe. Caractérisation en termes de parties réelle et imaginaire. Lien avec la continuité. Opérations sur les dérivées.

— Dérivées successives. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Opérations sur les dérivées successives.

— Extremum local, point critique. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.

— Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.

— Constance, monotonie et signe de la dérivée.

— Lipschitzianité. Toute fonction lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis — si $f'$ est bornée, $f$ est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne. Application à l'étude de certaines suites récurrentes.

— Théorème de la limite de la dérivée.

## ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 1

— Négligeabilité (fonctions et suites). Croissances comparées usuelles. Limites finies et petits o. Opérations sur les petits o.

— Développements limités. Unicité des coefficients. On peut toujours se ramener par translation à des développements limités au voisinage de 0. Troncature. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Cas des fonctions paires et impaires au voisinage de 0.

— Primitivation des développements limités. Formule de Taylor-Young. Dérivation des développements limités.

— Développements limités usuels au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $e^x$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que $\tan x$ à l'ordre 3.

— Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, inversion, composition, translation.

---

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Théorème de la limite de la dérivée.

— **(TD)** Théorème de Rolle généralisé à l'intervalle $[0,+\infty[$ — preuve par composition à droite par une fonction adaptée.

— Lemme de primitivation des développements limités : $g'(x) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big) \implies g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + o\big((x-a)^{n+1}\big)$.

— DEUX développements limités usuels au voisinage de 0 à DÉMONTRER parmi les suivants :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \ln(1+x), \quad e^x, \quad (1+x)^\alpha, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \operatorname{Arctan} x, \quad \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x.$$