SEMAINE 20 DU 13 AU 19 MARS

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 1

— Négligeabilité (fonctions et suites). Croissances comparées usuelles. Limites finies et petits o. Opérations sur les petits o.

— Développements limités. Unicité des coefficients. On peut toujours se ramener par translation à des développements limités au voisinage de 0. Troncature. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Cas des fonctions paires et impaires au voisinage de 0.

— Primitivation des développements limités. Formule de Taylor-Young. Dérivation des développements limités.

— Développements limités usuels au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que $\tan x$ à l'ordre 3.

— Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, inversion, composition, translation.

— Équivalence (fonctions et suites). Lien entre les équivalents et les limites, les petits o et les développements limités. Nouveaux équivalents usuels en 0 : $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{th} x$. Opérations sur les équivalents.

— Domination (fonctions et suites). Grands O, petits o et équivalence. Opérations sur les grands O.

— Constante d'Euler.

— Application des outils du chapitre au calcul de limites.

— Position locale par rapport à une tangente. Extrema locaux et points d'inflexion. Position locale par rapport à une asymptote.

CONVEXITÉ

Le cours a été énoncé intégralement avec des fonctions convexes, mais l'adaptation au cas des fonctions concaves est bien sûr au programme.

— Fonction convexe. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes sur tout l'intervalle de définition.

— Caractérisation de la convexité par les pentes des sécantes. Inégalité des pentes.

— Caractérisation des fonctions convexes dérivables par la monotonie de la dérivée et la position du graphe par rapport aux tangentes. Inégalités de convexité usuelles : $e^x \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

— Point d'inflexion.

— Inégalité de Jensen.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Si f est convexe sur I, alors pour tous $x, y \in I$ pour lesquels $x < y$, le graphe de f est situé au-dessus de sa sécante passant par $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$ sur $I \cap [y, +\infty[$.

— Si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et si $f(a) < f(b)$ avec $a < b$, alors f est croissante sur $[b, +\infty[$ ET admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.

— Si f est convexe sur I, f' y est croissante.

— Inégalité de Hölder.