SEMAINE DU 19 AU 25 MARS

APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Composition des applications linéaires.
- Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Noyau d'une matrice. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.
- Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes. Composition d'isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité par l'image d'une base.
- Aplication linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. « Injectif = surjectif » pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Si : $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
- Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.
- Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.
- Forme linéaire. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.
- Projection, symétrie. Propriétés, caractérisation.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe, caractérisation par décomposition du vecteur nul. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, cas d'égalité. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Forme géométrique du théorème du rang <u>ET</u> théorème du rang.
- Dans un espace vectoriel de dimension n, l'intersection de r hyperplans est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-r$. + Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans.
- Si p est linéaire et : $p^2 = p$, alors p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$.
- Inégalité : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe.
- **(TD)** Démonstration de la formule de Grassmann en étudiant l'application $(f,g) \longmapsto f+g$.
- **(TD)** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$: $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g \iff \mathrm{Im}\,(gf) = \mathrm{Im}\, g$.
- **(TD)** Pour tous $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ avec E et F de dimension finie : $\dim \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$.