Semaine du 18 au 24 mars

Applications linéaires

— Application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Composition des applications linéaires.

— Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.

— Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Noyau d'une matrice. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

— Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes. Composition d'isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité par l'image d'une base.

— Aplication linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. « Injectif = surjectif » pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Si : $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

— Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.

— Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.

— Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

— Forme linéaire. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.

Questions de cours de début d'heure

— Forme géométrique du théorème du rang <u>ET</u> théorème du rang.

— Dans un espace vectoriel de dimension n, l'intersection de r hyperplans est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-r$. + Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans.

— Si p est linéaire et : $p^2 = p$, alors p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$.

— **(TD)** Démonstration de la formule de Grassmann en étudiant l'application $(f,g) \longmapsto f+g$.

— **(TD)** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tous $f,g \in \mathscr{L}(E)$: $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g \iff \mathrm{Im}\,(gf) = \mathrm{Im}\, g$.

— **(TD)** Pour tous $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ avec E et F de dimension finie : $\dim \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$.