SEMAINE 21 DU 20 AU 26 MARS

APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes.
- Opérations sur les applications linéaires : composition, réciproque, combinaison linéaire. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Anneau $\mathscr{L}(E)$, groupe $\mathrm{GL}(E)$. Endomorphisme nilpotent.
- Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Noyau d'une matrice. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.
- Détermination d'une application linéaire sur une base ou une somme directe. Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Aplication linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. « Injectif = surjectif » pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.
- Forme linéaire. La famille des formes coordonnées est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Détermination d'une application linéaire sur une base.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathscr{B}$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est libre.
- Forme géométrique du théorème du rang <u>ET</u> théorème du rang.
- **(TD)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$: $\quad E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(gf) = \mathrm{Im}\, g$.
- **(TD)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Alors $p \leqslant n$ et $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.