

SEMAINE DU 25 AU 31 MARS

APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. « Injectif = surjectif » pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Si : $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
- Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.
- Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.
- Forme linéaire. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.
- Projection, symétrie. Propriétés, caractérisation.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe, caractérisation par décomposition du vecteur nul. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, cas d'égalité. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

DÉNOMBREMENT

- Ensemble fini/infini, cardinal d'un ensemble fini. Lien avec l'équipotence. Parties d'un ensemble fini. Effet d'une application sur le cardinal.
 - Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis, cardinal d'une différence de deux ensembles finis. Principe des bergers. **Attention** : La formule du crible est hors programme, mais peut être exigée pour trois ou quatre ensembles.
 - Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis. Liste, nombre de p -listes d'un ensemble fini. Arrangement, nombre de p -arrangements d'un ensemble fini.
 - Nombre d'applications (resp. injectives) entre deux ensembles finis. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
 - Combinaison, nombre de p -combinaisons d'un ensemble fini. Nombre de k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Nombre de parties d'un ensemble fini.
 - Indicatrice d'une partie, propriétés.
 - Formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Utilisation de polynômes ou de fractions rationnelles pour calculer des sommes du genre : $\sum_{k=0}^n kx^k$, $\sum_{k=0}^n k^2x^k$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kx^k \dots$
-

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Dans un espace vectoriel de dimension n , l'intersection de r hyperplans est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n - r$. + Tout sous-espace vectoriel de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans.
- Inégalité : $\dim \sum_{i=1}^p F_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$, avec égalité si et seulement si F_1, \dots, F_p sont en somme directe.
- **(TD)** Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F . Il existe une application linéaire de E dans F de noyau K et d'image I si et seulement si : $\dim K + \dim I = \dim E$.
- Interprétation combinatoire de la formule du capitaine : $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ ET de la formule de Pascal.