SEMAINE DU 22 AU 28 MARS

APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Composition des applications linéaires.
- Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Noyau d'une matrice. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.
- Isomorphisme, composition, réciproque. Espaces vectoriels isomorphes. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité par l'image d'une base.
- Aplication linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. « Injectif = surjectif » pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.
- Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.
- Forme linéaire. La famille des formes coordonnées est une base de l'espace des formes linéaires. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.
- Projection, symétrie. Propriétés, caractérisation.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe, caractérisation par décomposition du vecteur nul. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, cas d'égalité. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

DÉNOMBREMENT

- Ensemble fini/infini, cardinal d'un ensemble fini. Lien avec l'équipotence. Parties d'un ensemble fini. Effet d'une application sur le cardinal.
- Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis, cardinal d'une différence de deux ensembles finis. Principe des bergers.
  Attention : La formule du crible est hors programme, mais peut être exigée pour trois ou quatre ensembles.
- Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis. Liste, nombre de p-listes d'un ensemble fini. Arrangement, nombre de p-arrangements d'un ensemble fini.
- Nombre d'applications (resp. injectives) entre deux ensembles finis. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
- Combinaison, nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini. Nombre de k-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Dans un espace vectoriel de dimension n, l'intersection de r hyperplans est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-r$. + Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans.
- Inégalité : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe.
- **(TD)** Pour tous $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ avec E et F de dimension finie : $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
- **(TD)** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F. Il existe une application linéaire de E dans F de noyau K et d'image I si et seulement si : $\dim K + \dim I = \dim E$.