SEMAINE DU 26 MARS AU 1ER AVRIL

APPLICATIONS LINÉAIRES

— Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot.

— Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

— Forme linéaire. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. Intersection d'hyperplans.

— Projection, symétrie. Propriétés, caractérisation.

— Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe, caractérisation par décomposition du vecteur nul. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, cas d'égalité. Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre. Bases d'une somme directe. Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

DÉNOMBREMENT

— Ensemble fini/infini, cardinal d'un ensemble fini. Lien avec l'équipotence. Parties d'un ensemble fini. Effet d'une application sur le cardinal.

— Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis, cardinal d'une différence de deux ensembles finis. Principe des bergers. **Attention :** La formule du crible est hors programme.

— Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis. Liste, nombre de p-listes d'un ensemble fini. Arrangement, nombre de p-arrangements d'un ensemble fini.

— Nombre d'applications (resp. injectives) entre deux ensembles finis. Nombre de permutations d'un ensemble fini.

— Combinaison, nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini. Nombre de k-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$. Nombre de parties d'un ensemble fini.

— Indicatrice d'une partie, propriétés.

— Formule du crible (hors programme, mais à utiliser librement pour trois ou quatre ensembles).

— Formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$. Utilisation de polynômes ou de fractions rationnelles pour calculer des sommes du genre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2x^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k\ldots$

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Dans un espace vectoriel de dimension n, l'intersection de r hyperplans est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-r$. + Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans.

— Inégalité : $\displaystyle\dim\sum_{i=1}^{p}F_i\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim F_i$, avec égalité si et seulement si $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe.

— **(TD)** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F. Il existe une application linéaire de E dans F de noyau K et d'image I si et seulement si : $\dim K+\dim I=\dim E$.

— Interprétation combinatoire de la formule du capitaine : $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$ **ET** de la formule de Pascal.