SEMAINE DU 8 AU 14 AVRIL

MODÉLISATION PROBABILISTE SUR UN UNIVERS FINI

— Vocabulaire usuel des événements, système complet d'événements. Variable aléatoire, notations $\{X = x\}$, $\{X \leqslant x\}$, $\{X \in A\}$...

— Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Propriétés : complémentaire, croissance, réunion. Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires.

Attention : La formule du crible est hors programme, mais peut être exigée pour trois ou quatre événements.

— Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide E : $P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}$. Loi de Bernoulli, exemple des variables aléatoires $\mathbb{1}_A$. Loi de $f(X)$ en fonction de f et de la loi de X. Définition implicite d'un espace probabilisé fini par la donnée d'une loi de variable aléatoire.

— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Formule des probabilités composées. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire.

— Événements (mutuellement) indépendants. Loi binomiale. Variables aléatoires (mutuellement) indépendantes. Si $X_1, \ldots, X_m, \ldots X_n$ sont indépendantes, $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

— Loi d'un couple de variables aléatoires, lois marginales. Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X, Y) \hookrightarrow \mathscr{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et : $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(F)$. Loi de $f(X, Y)$ en fonction de f et de la loi de (X, Y). Si X et Y sont indépendantes et si : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(m, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors : $X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m + n, p)$. Existence d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X, Y) \hookrightarrow \mathscr{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et : $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(F)$.
- Si X et Y sont indépendantes et si : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(m, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors : $X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m + n, p)$ — avec une preuve polynomiale ou combinatoire, au choix de l'étudiant, de la formule de type Vandermonde utilisée.
- **(TD)** Loi de $X + Y$ si X et Y sont indépendantes et : $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$.