Semaine du 5 au 11 avril

Espaces probabilisés finis et variables aléatoires

— Vocabulaire usuel des événements, système complet d'événements. Variable aléatoire, notations $\{X = x\}$, $\{X \leqslant x\}$, $\{X \in A\}\dots$

— Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Propriétés : complémentaire, croissance, réunion. Distribution de probabilités sur un univers fini. Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires.

Attention : La formule du crible est hors programme, mais peut être exigée pour trois ou quatre événements.

— Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide E : $P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}$. Loi de Bernoulli, exemple fondamental des variables aléatoires $\mathbb{1}_A$. Loi de $f(X)$. Définition implicite d'un espace probabilisé fini par la donnée d'une distribution de probabilités.

— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Formule des probabilités composées. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire.

— Événements indépendants. Indépendance et complémentaires. Loi binomiale. Variables aléatoires indépendantes. Existence d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites. Lemme des coalitions.

— Loi (conjointe) d'une famille finie de variables aléatoires, lois marginales. Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X,Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et : $X \sim \mathcal{U}(E)$ et $Y \sim \mathcal{U}(F)$. Loi de $f(X,Y)$. Sommes de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales.

Questions de cours de début d'heure

- Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X,Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et : $X \sim \mathcal{U}(E)$ et $Y \sim \mathcal{U}(F)$.
- Si X et Y sont indépendantes et si : $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors : $X + Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$ — avec une preuve polynomiale ou combinatoire, au choix de l'étudiant, de la formule de type Vandermonde utilisée.
- **(TD)** Loi de $X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes et : $X \sim \mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$ et $Y \sim \mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.