SEMAINE 24 DU 10 AU 16 AVRIL

ESPACES PROBABILISÉS FINIS ET VARIABLES ALÉATOIRES

- Vocabulaire usuel des événements, système complet d'événements. Variable aléatoire, notations $\{X = x\}$, $\{X \leqslant x\}$, $\{X \in A\}\ldots$
- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Propriétés : complémentaire, croissance, réunion. Distribution de probabilités sur un univers fini. Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires.

  Attention : La formule du crible est hors programme, mais peut être exigée pour trois ou quatre événements.
- Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide E : $P(X \in A) = \dfrac{|A|}{|E|}$. Loi de Bernoulli, exemple fondamental des variables aléatoires $\mathbb{1}_A$. Loi de $f(X)$. Définition implicite d'un espace probabilisé fini par la donnée d'une distribution de probabilités.
- Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Formule des probabilités composées. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire.
- Événements indépendants. Indépendance et complémentaires. Loi binomiale. Variables aléatoires indépendantes. Existence d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites. Lemme des coalitions.
- Loi (conjointe) d'une famille finie de variables aléatoires, lois marginales. Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X,Y) \sim \mathscr{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et $X \sim \mathscr{U}(E)$ et $Y \sim \mathscr{U}(F)$. Loi de $f(X,Y)$. Sommes de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Loi uniforme sur un produit cartésien : $(X,Y) \sim \mathscr{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et $X \sim \mathscr{U}(E)$ et $Y \sim \mathscr{U}(F)$.
- Si X et Y sont indépendantes et si $X \sim \mathscr{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $X+Y \sim \mathscr{B}(m+n,p)$ — avec une preuve polynomiale ou combinatoire, au choix de l'étudiant(e), de la formule de type Vandermonde utilisée.
- **(TD)** Loi de $X+Y$ lorsque X et Y sont indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
- Si λ est un pôle simple de la fraction irréductible $\dfrac{A}{B}$ de partie polaire associée $\dfrac{a}{X-\lambda}$, alors $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.