Semaine du 30 avril au 6 mai

Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

— Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynôme irréductible. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{C}$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$.

— PGCD de deux polynômes, « unicité ». Algorithme d'Euclide. Les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs de $A \wedge B$. Relations de Bézout, algorithme d'Euclide étendu. Extension des définitions et résultats précédents à un nombre fini quelconque de polynômes.

— Polynômes premiers entre eux (dans leur ensemble ou deux à deux). Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

— PPCM de deux polynômes, « unicité ». Lien avec le PGCD.

— Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. Structure vectorielle.

— Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Dérivée. Degré. Fonction rationnelle. Zéros et pôles, multiplicité. Partie entière.

— Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$. Application au calcul d'intégrales. Techniques usuelles :

- Multiplication par $(X-\lambda)^m$ puis évaluation en λ.
- Multiplication par X puis passage à la limite en $+\infty$.
- Évaluation en un point.
- Mise au même dénominateur et identification.
- Formule « $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$ » dans le cas d'une forme irréductible $\dfrac{A}{B}$ et d'un pôle simple λ.

Attention ! Les règles de Bioche sont hors programme.

Intégration sur un segment

— Continuité uniforme, lien avec la continuité et la lipschitzianité. Théorème de Heine.

— Fonction en escalier, subdivision adaptée. Intégrale d'une fonction en escalier, propriétés.

— Fonction continue par morceaux, subdivision adaptée, stabilité par combinaison linéaire, produit, parties réelle et imaginaire et module. Distance uniforme, inégalité triangulaire. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux, propriétés : linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, lien avec les parties réelle et imaginaire, possibilité de modifier la fonction en un nombre fini de points, et dans le cas de fonctions réelles : positivité, croissance, positivité stricte, nullité avec signe constant.

— Théorème fondamental du calcul intégral. Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique. Intégration par parties et changement de variable.

— Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

— Sommes de Riemann. Majoration de l'erreur en $\dfrac{1}{n}$ dans le cas $\mathscr{C}^1$.

Questions de cours de début d'heure

— **(TD)** Décomposition en éléments simple de $\dfrac{P'}{P}$ **et** application au calcul de $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} \frac{1}{1-\omega}$, ou pour celles et ceux qui préfèrent (au choix de l'étudiant), application au théorème de Gauss-Lucas avec interprétation géométrique.

— Théorème de Heine.

— Approximation uniforme d'une fonction **continue** sur un segment par des fonctions en escalier.

— Théorème fondamental du calcul intégral : $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I pour tous $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$.

— Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.

— **(Analyse asymptotique de niveau 2)** Soit $f \in \mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ positive décroissante. Pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1).$$