SEMAINE DU 6 AU 12 MAI

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

— Continuité uniforme, lien avec la continuité et la lipschitzianité. Théorème de Heine.

— Fonction en escalier, subdivision adaptée. Intégrale d'une fonction en escalier, propriétés.

— Fonction continue par morceaux, subdivision adaptée, stabilité par combinaison linéaire, produit, parties réelle et imaginaire et module. Distance uniforme, inégalité triangulaire. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux, propriétés : linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, lien avec les parties réelle et imaginaire, possibilité de modifier la fonction en un nombre fini de points, et dans le cas de fonctions réelles : positivité, croissance, positivité stricte, nullité avec signe constant.

— Théorème fondamental du calcul intégral. Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique. Intégration par parties et changement de variable.

— Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

— Sommes de Riemann. Majoration de l'erreur en $\frac{1}{n}$ dans le cas lipschitzien (donc dans le cas $\mathscr{C}^1$).

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 2

Attention : Aucun des résultats de ce chapitre n'est au programme de MPSI. Ce chapitre est plutôt une collection de techniques classiques.

— Étude de sommes par encadrement d'intégrales. Développement asymptotique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Théorème de Heine.

— Approximation uniforme d'une fonction **CONTINUE** sur un segment par des fonctions en escalier.

— Théorème fondamental du calcul intégral : $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I pour tous $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$.

— Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.

— **(Analyse asymptotique de niveau 2)** Soit $f \in \mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ positive décroissante. Pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1).$$