Semaine 25 du 17 au 23 avril

Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

— Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynôme irréductible. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{C}$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$.

— PGCD de deux polynômes, « unicité ». Algorithme d'Euclide. Les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs de $A \wedge B$. Relations de Bézout, algorithme d'Euclide étendu. Extension des définitions et résultats précédents à un nombre fini quelconque de polynômes.

— Polynômes premiers entre eux (dans leur ensemble ou deux à deux). Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. PPCM de deux polynômes, « unicité ». Lien avec le PGCD.

— Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. Structure vectorielle. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Dérivée. Degré. Fonction rationnelle. Zéros et pôles, multiplicité. Partie entière.

— Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Application au calcul d'intégrales. Techniques usuelles :

$\longrightarrow$ Multiplication par $(X-\lambda)^m$ puis évaluation en λ.

$\longrightarrow$ Multiplication par X puis passage à la limite en $+\infty$.

$\longrightarrow$ Évaluation en un point.

$\longrightarrow$ Mise au même dénominateur et identification.

$\longrightarrow$ Formule $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$ dans le cas d'une forme irréductible $\dfrac{A}{B}$ et d'un pôle simple λ.

Intégration sur un segment

Les techniques de calcul intégral de début d'année sont supposées encore connues : IPP, changement de variable, primitivation d'une fonction de la forme $x \longmapsto \sin^m x \cos^n x$, $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou d'une fraction rationnelle.

— Continuité uniforme, lien avec la continuité et la lipschitzianité. Théorème de Heine.

— Fonction en escalier, fonction continue par morceaux. Stabilité par combinaison linéaire, produit, module, parties réelle et imaginaire. Distance uniforme, inégalité triangulaire. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

— Intégrale d'une fonction en escalier, puis d'une fonction continue par morceaux Linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, lien avec les parties réelle et imaginaire, possibilité de modifier la fonction en un nombre fini de points, et dans le cas de fonctions réelles, positivité, croissance, positivité stricte, nullité avec signe constant. Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique.

— Théorème fondamental du calcul intégral. Intégration par parties. Changement de variable.

— Étude de limites d'intégrales par encadrement/minoration/majoration.

— Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

— Sommes de Riemann. Majoration de l'erreur en $\dfrac{1}{n}$ dans le cas lipschitzien (donc dans le cas $\mathscr{C}^1$).

Questions de cours de début d'heure

— **(TD)** Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ sur $\mathbb{C}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul.

— Théorème de Heine.

— Théorème fondamental du calcul intégral : $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I pour tout intervalle I, toute fonction $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ et tout $a \in I$.

— Énoncés (sans démonstration cette semaine) de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral et du théorème des sommes de Riemann.