# SEMAINE 26 DU 8 AU 14 MAI

## INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Les techniques de calcul intégral de début d'année sont supposées encore connues : IPP, changement de variable, primitivation d'une fonction de la forme $x \longmapsto \sin^m x \cos^n x$, $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou d'une fraction rationnelle.

- Continuité uniforme, lien avec la continuité et la lipschitzianité. Théorème de Heine.
- Fonction en escalier, fonction continue par morceaux. Stabilité par combinaison linéaire, produit, module, parties réelle et imaginaire. Distance uniforme, inégalité triangulaire. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier, puis d'une fonction continue par morceaux Linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, lien avec les parties réelle et imaginaire, possibilité de modifier la fonction en un nombre fini de points, et dans le cas de fonctions réelles, positivité, croissance, positivité stricte, nullité avec signe constant. Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique.
- Théorème fondamental du calcul intégral. Intégration par parties. Changement de variable.
- Étude de limites d'intégrales par encadrement/minoration/majoration.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. Majoration de l'erreur en $\dfrac{1}{n}$ dans le cas lipschitzien (donc dans le cas $\mathscr{C}^1$).

## ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 2

- Étude de sommes par encadrement d'intégrales. Exemple à connaître : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
- Développements asymptotiques de suites récurrentes.
- Développements asymptotiques de suites d'intégrales et de fonctions définies par une intégrale.
- Développements asymptotiques de solutions d'équations définies implicitement.
- Formule de Wallis. Formule de Stirling.

---

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.
- **(TD)** Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$ : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{ixt}\,dt = 0$.
- Soit $f \in \mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ positive décroissante. Pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_1^n f(t)\,dt + \ell + o(1)$.
- **(TD)** Pour tout $f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.