SEMAINE DU 20 AU 26 MAI

REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

— Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Formule : $\operatorname{rg}(\mathscr{X}) = \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big)$.

— Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Formules :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\Big), \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\big(u(x)\big) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Isomorphisme $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Caractérisation des isomorphismes. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde.

— Interprétation géométrique des blocs en termes de stabilité. Exemple des projections et des symétries dans une base adaptée.

— Matrice de passage. Changement de base pour un vecteur. Changement de bases pour une application linéaire. Changement de bases et matrice J_r.

— Matrices équivalentes. Lien avec les opérations élémentaires et le changement de bases pour une application linéaire. Caractérisation par le rang. Invariance du rang par transposition.

— Matrices extraites. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices extraites.

— Matrices semblables. Lien avec le changement de base pour un endomorphisme. Invariance de la trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

Les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée et la notion de matrice carrée diagonalisable ont été introduites pour éclairer les changements de bases et l'objectif à terme que constitue la réduction, mais elles ne figurent pas au programme de MPSI et, si elles sont exploitées en colles, elles ne doivent en tout cas pas faire l'objet d'une évaluation.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible si $x_1, \dots, x_n$ sont distincts.

— Formule de changement de base pour une application linéaire — preuve à présenter à partir du diagramme commutatif.

— Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F pour lesquelles : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$.

— **(TD)** Tout endomorphisme nilpotent d'indice n en dimension n a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ dans une certaine base.