SEMAINE 27 DU 22 AU 28 MAI

REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

— Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Formules :
$$\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\Big),\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(u(x)\big)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\quad\text{et}\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$
Isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Caractérisation des isomorphismes. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde.

— Interprétation géométrique des blocs en termes de stabilité. Exemple des projections et des symétries dans une base adaptée.

— Matrice de passage. Changement de base pour un vecteur. Changement de bases pour une application linéaire. Changement de bases et matrice J_r.

— Matrices équivalentes. Lien avec les opérations élémentaires et le changement de bases pour une application linéaire. Caractérisation par le rang. Invariance du rang par transposition.

— Matrices extraites. Rang d'une matrice extraite.

— Matrices semblables. Lien avec le changement de base pour un endomorphisme. Invariance du rang et de la trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

Hors programme en MPSI, les notions de valeur/vecteur propre et d'endomorphisme/matrice diagonalisable ont été introduites pour éclairer l'intérêt des changements de bases et l'objectif à terme que constitue la réduction. On pourra mentionner ces notions en colle, mais avec parcimonie, discernement et quelques rappels en cas de besoin ! Aucun résultat de réduction n'est exigible.

DÉTERMINANTS

— Application multilinéaire. Forme multilinéaire alternée, définition par les familles dont deux vecteurs sont égaux. Antisymétrie, action d'une permutation, nullité sur une famille libre.

— Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Si $n=\dim E$, toute forme n-linéaire alternée de E est un multiple du déterminant dans une base fixée. Cas des dimensions 2 et 3, interprétation du déterminant en termes d'aire et de volume orientés. Formule de changement de base, caractérisation des bases.

— Déterminant d'une matrice carrée. Formule $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})=\det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big)$. Multilinéarité par rapport aux lignes et aux colonnes. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Invariance par transposition.

— Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Calcul de déterminants par la méthode du pivot.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde, interprétée comme matrice d'une certaine application linéaire.

— Pour tout $f\in\mathscr{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F pour lesquelles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=J_r$.

— Déterminant d'une matrice (vraiment) triangulaire (pas par blocs).

— Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(X)=\det(XI_n-A)$ est un polynôme unitaire de degré n et ses racines sont exactement les valeurs propres de A. (La matrice XI_n-A est à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(X)$, mais aucune subtilité n'est exigée à ce sujet.)