Semaine du 28 mai au 3 juin

Représentation matricielle des applications linéaires

— Matrice de passage. Changement de base pour un vecteur. Changement de bases pour une application linéaire. Changement de bases et matrice J_r.

— Matrices équivalentes. Lien avec les opérations élémentaires et le changement de bases pour une application linéaire. Caractérisation par le rang. Invariance du rang par transposition.

— Matrices extraites. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices extraites.

— Matrices semblables. Lien avec le changement de base pour un endomorphisme. Invariance de la trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

Les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée et la notion de matrice carrée diagonalisable ont été introduites pour éclairer les changements de bases et l'objectif à terme que constitue la réduction, mais elles ne figurent pas au programme de MPSI et ne doivent pas faire l'objet d'une évaluation.

Déterminants

— Groupe symétrique. Support d'une permutation. Deux permutations disjointes commutent. Cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature. Permutations paires/impaires.

— Application multilinéaire. Forme multilinéaire alternée, définition par les familles dont deux vecteurs sont égaux. Antisymétrie, action d'une permutation, nullité sur une famille libre.

— Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Si $n = \dim E$, toute forme n-linéaire de E est un multiple du déterminant dans une base fixée. Cas des dimensions 2 et 3, interprétation du déterminant en termes d'aire et de volume orientés. Formule de changement de base, caractérisation des bases. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

— Déterminant d'une matrice carrée. Formule « $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big)$ ». Multilinéarité par rapport aux lignes et aux colonnes. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Invariance par transposition.

— Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Calcul de déterminants par la méthode du pivot.

— Mineurs, cofacteurs, comatrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Formule d'inversion.

— Déterminant d'un endomorphisme. Propriétés.

Questions de cours de début d'heure

— Déterminant d'une matrice triangulaire — vraiment triangulaire, pas triangulaire par blocs.

— Calcul des déterminants de Vandermonde par un raisonnement polynomial. La récurrence finale n'a pas besoin d'être formalisée, trois petits points suffisent…

— **(Variables aléatoires)** On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. On note X_1 (resp. X_2) le résultat du premier (resp. deuxième) lancer. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.