SEMAINE DU 3 AU 9 JUIN

REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

— Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Formule : $\mathrm{rg}(\mathscr{X}) = \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big)$.

— Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Formules :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\Big), \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(u(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Caractérisation des isomorphismes. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde.

— Interprétation géométrique des blocs en termes de stabilité. Exemple des projections et des symétries dans une base adaptée.

— Matrice de passage. Changement de base pour un vecteur. Changement de bases pour une application linéaire. Changement de bases et matrice J_r.

— Matrices équivalentes. Lien avec les opérations élémentaires et le changement de bases pour une application linéaire. Caractérisation par le rang. Invariance du rang par transposition.

— Matrices extraites. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices extraites.

— Matrices semblables. Lien avec le changement de base pour un endomorphisme. Invariance de la trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

Les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée et la notion de matrice carrée diagonalisable ont été introduites pour éclairer les changements de bases et l'objectif à terme que constitue la réduction, mais elles ne figurent pas au programme de MPSI et, si elles sont exploitées en colles, elles ne doivent en tout cas pas faire l'objet d'une évaluation.

DÉTERMINANTS

— Groupe symétrique. Support d'une permutation. Deux permutations disjointes commutent. Cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature. Permutations paires/impaires.

— Application multilinéaire. Forme multilinéaire alternée, définition par les familles dont deux vecteurs sont égaux. Antisymétrie, action d'une permutation, nullité sur une famille libre.

— Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Si $n = \dim E$, toute forme n-linéaire de E est un multiple du déterminant dans une base fixée. Cas des dimensions 2 et 3, interprétation du déterminant en termes d'aire et de volume orientés. Formule de changement de base, caractérisation des bases. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

— Déterminant d'une matrice carrée. Formule « $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big)$ ». Multilinéarité par rapport aux lignes et aux colonnes. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Invariance par transposition.

— Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Calcul de déterminants par la méthode du pivot.

— Mineurs, cofacteurs, comatrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Formule d'inversion.

— Déterminant d'un endomorphisme. Propriétés.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la fonction $x \longmapsto \chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ est polynomiale unitaire de degré n et ses racines sont exactement les valeurs propres de A — il faut donc connaître la définition d'une valeur propre !

— Déterminant d'une matrice triangulaire — vraiment triangulaire, pas triangulaire par blocs.

— Calcul des déterminants de Vandermonde par un raisonnement polynomial. La récurrence finale n'a pas besoin d'être formalisée, trois petits points suffisent.