Semaine du 10 au 16 juin

Position et dispersion d'une variable aléatoire réelle

— Espérance d'une variable aléatoire réelle. Espérance de la loi uniforme, de la loi de Bernoulli, de la loi binomiale. Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Formule de transfert, cas d'une couple de variables aléatoires. Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.

— Moments, moments centrés, variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle. Condition de nullité, effet d'une transformation affine. Covariance de deux variables aléatoires réelles. Lien avec l'indépendance, variance d'une somme. Variance de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

— Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Espaces préhilbertiens réels

— Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme et distance associées. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire, cas d'égalité. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires.

— Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales, familles orthogonales/orthonormales. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.

— Coordonnées dans une base orthonormale et calcul du produit scalaire et de la norme en fonction des coordonnées.

— Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales en dimension finie. Théorème de la base orthonormale incomplète.

— Orthogonal d'une partie. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie. Vecteurs normaux à un hyperplan.

— Projection et symétrie orthogonales. Expression d'ue projection orthogonale dans une base orthonormale.

Questions de cours de début d'heure

— Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

— **(TD)** Inégalité de Jensen : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) \leqslant f\big(\mathrm{E}(X)\big)$ pour toute variable aléatoire X à valeurs dans I et toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable concave, i.e. pour laquelle : $f'' \leqslant 0$.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

— Théorème de Pythagore généralisé. + Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

— Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E : $E = F \oplus F^\perp$ — en deux temps : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et $E = F + F^\perp$.