SEMAINE DU 11 AU 17 JUIN

VARIABLES ALÉATOIRES SUR UN ESPACE PROBABILISÉ FINI

— Variable aléatoire. Système complet d'événements associé. Loi d'une variable aléatoire. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire. Loi de l'image d'une variable aléatoire par une fonction.

— Espérance d'une variable aléatoire réelle. Linéarité, positivité, croissance, formule de transfert.

— Loi uniforme. Loi de Bernoulli. Loi binomiale. Espérances.

— Couple de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales. Loi de l'image d'un couple de variables aléatoires par une fonction.

— Paire de variables aléatoires indépendantes. Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Généralisation à un nombre fini quelconque de variables aléatoires. Somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathscr{B}(m,p)$ et $\mathscr{B}(n,p)$. Si $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\ldots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\ldots,X_n)$ le sont aussi.

— Moments, moments centrés, variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle. Condition de nullité, effet d'une transformation affine. Variance des lois de Bernoulli et des lois binomiales.

— Covariance de deux variables aléatoires réelles. Variance d'une somme. Lien avec l'indépendance.

— Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

— Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme et distance associées. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire, cas d'égalité. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires.

— Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales, familles orthogonales/orthonormales. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.

— Coordonnées dans une base orthonormale et calcul du produit scalaire et de la norme en fonction des coordonnées.

— Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales en dimension finie. Théorème de la base orthonormale incomplète.

— Orthogonal d'une partie. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie. Vecteurs normaux à un hyperplan et orientation d'un hyperplan.

— Projection et symétrie orthogonales. Expression d'ue projection orthogonale dans une base orthonormale. Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

— Théorème de Pythagore généralisé. + Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

— Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E : $E = F \oplus F^\perp$ — en deux temps : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et $E = F + F^\perp$.

— Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E et pour tout $x \in E$, si on note $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F : $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ et le minimum sous-jacent n'est atteint qu'en $p(x)$.