SEMAINE DU 18 AU 24 NOVEMBRE

LIMITE D'UNE SUITE

— Vocabulaire usuel sur les suites : constance, stationnarité, caractère borné, signe, monotonie, propriété vraie à partir d'un certain rang.

— Définitions de la limite d'une suite : limite finie, limite $+\infty$, limite $-\infty$. Unicité de la limite. Convergence et divergence. Toute suite convergente est bornée.

— Opérations sur les limites : somme, produit, multiplication par un scalaire, inverse, composition à gauche par une fonction (ce dernier résultat est admis car la notion de limite d'une fonction n'a pas encore été proprement définie).

— Passage à la limite dans les inégalités strictes/larges.

— Suites extraites. Limite d'une suite extraite. Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Application la non-existence de limites.

— Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration. Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

— Théorème de la limite monotone.

— Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes.

— Suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ » :

  $\longrightarrow$ Partie stable par f. Existence et unicité de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour une valeur de u_0 donnée dans un domaine stable.

  $\longrightarrow$ Utilisation de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ pour l'étude des variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  $\longrightarrow$ Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

  $\longrightarrow$ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors : $f(\ell) = \ell$.

— Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure. Caractérisation séquentielle de la densité. Densité de l'ensemble des décimaux.

— Extension des résultats du chapitre aux suites complexes. Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire.

— Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, si : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \eta$ à partir d'un certain rang avec $\eta \in \left]0,1\right[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Application au calcul de : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

— Théorème de la limite monotone dans le cas « croissante majorée ».

— Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans le cas fini.

— Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass complexe à partir du théorème de Bolzano-Weierstrass réel.