

SEMAINE 7 DU 13 AU 20 NOVEMBRE

COMPLÉMENTS SUR LES RÉELS

- Majorants/minorants d'une partie de \mathbb{R} .
- Plus grand/petit élément d'une partie de \mathbb{R} . Unicité. Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément. Toute partie non vide majorée de \mathbb{N} possède un plus grand élément.
- Borne supérieure/inférieure d'une partie de \mathbb{R} . Lien avec le plus grand/petit élément. Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$. Borne supérieure/inférieure de $A \cup B$, $A + B$ et λA avec $\lambda > 0$.
- Propriété de la borne supérieure/inférieure dans \mathbb{R} .
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Reprise des points précédents dans $\overline{\mathbb{R}}$, notamment avec la propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.
- Partie entière d'un réel.
- Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{R} (ou de \mathbb{C} dans \mathbb{C}). L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a . Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints.
- Point intérieur, point adhérent d'une partie de \mathbb{R} . Partie dense dans \mathbb{R} . Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} .

LIMITE D'UNE SUITE

- Vocabulaire usuel sur les suites : constance, stationnarité, caractère borné, signe, monotonie, propriété vraie à partir d'un certain rang.
- Définitions de la limite d'une suite : limite finie, limite $+\infty$, limite $-\infty$. Unicité. Convergence/divergence. Toute suite convergente est bornée.
- Opérations sur les limites : somme, produit, multiplication par un scalaire, inverse, composition à gauche par une fonction (momentanément admis).
- Passage à la limite et inégalités strictes/larges.
- Suite extraite. Limite d'une suite extraite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Application la non-existence de limites.
- Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration. Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.
- Théorème de la limite monotone.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- (TD) Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . La borne inférieure $d(x, A) = \inf\{|x - a| \mid a \in A\}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell \ell'$.
- Théorème d'encadrement.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta \in]0, 1[$. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Application à la comparaison géométrique/factorielle.