SEMAINE DU 2 AU 8 DÉCEMBRE

INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS

— Application/fonction : ensemble de définition, ensemble d'arrivée, image et antécédents. Image d'une application. Composition. Restriction, prolongements.

— Image directe/réciproque d'une partie. L'image réciproque de B par f a été notée $f^{\leftarrow}(B)$ dans un premier temps.

— Injection. Composée de deux injections. Toute fonction strictement monotone est injective.

— Surjection. Composée de deux surjections.

— Bijection, réciproque, lien entre les deux notions. Bijectivité d'une réciproque, d'une composée. Si f est bijective : $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$ — ce qui justifie l'abandon de la notation $f^{\leftarrow}(B)$.

ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS RELATIFS

— Divisibilité et congruence. Propriétés usuelles en tant que relations binaires. Compatibilité avec l'addition et la multiplication.

— Nombres premiers. Existence de la factorisation première. Infinité de l'ensemble des nombres premiers. Crible d'Ératosthène.

— Théorème de la division euclidienne. Algorithme associé.

Les points suivants n'ont pas encore été revus, mais ils ont été étudiés en Terminale (enseignement de spécialité) et peuvent être exploités — avec modération — dans les exercices :

— PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide et : $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(a \wedge b)$. Relations de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. Associativité du PGCD, factorisation par un diviseur commun.

— PGCD d'une famille finie d'entiers. Extension des résultats précédents.

— Couple d'entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, théorème de Gauss.

— Unicité de la factorisation première, calcul du PGCD à partir de la factorisation première.

Les PPCM, les valuations p-adiques et le petit théorème de Fermat attendront la semaine suivante.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— **(TD)** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. Dans ce cas : $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$, et si f est injective : $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Inversement, si : $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ pour toute partie A de E, alors f est injective.

— **(TD)** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On suppose que : $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est sur E tout entier.

— Existence de la factorisation première — pas l'unicité ! — **ET** infinité de l'ensemble des nombres premiers.

— Théorème de la division euclidienne — existence **ET** unicité.