Semaine du 4 au 10 décembre

Injections, surjections, bijections

— Application/fonction : ensemble de définition, ensemble d'arrivée, image et antécédents. Image d'une application. Composition. Restriction, prolongements.

— Image directe/réciproque d'une partie. L'image réciproque de B par f a été notée $f^{\leftarrow}(B)$ dans un premier temps.

— Injection. Composée de deux injections. Toute fonction strictement monotone est injective.

— Surjection. Composée de deux surjections.

— Bijection, réciproque, lien entre les deux notions. Bijectivité d'une réciproque, d'une composée. Si f est bijective : $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$ — ce qui justifie l'abandon de la notation « $f^{\leftarrow}(B)$ ».

Arithmétique des entiers relatifs

— Divisibilité et congruence. Propriétés usuelles en tant que relations binaires. Compatibilité avec l'addition et la multiplication.

— Nombres premiers. Existence de la factorisation première. Infinité de l'ensemble des nombres premiers. Crible d'Ératosthène.

— Théorème de la division euclidienne. Algorithme associé.

— PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide et : $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(a \wedge b)$. Relations de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. Associativité du PGCD, factorisation par un diviseur commun.

— PGCD d'une famille finie d'entiers. Extension des résultats précédents.

— Couple d'entiers premiers entre eux, entiers premiers entre eux dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. Si des entiers sont premiers avec n, alors leur produit l'est aussi. Si des entiers sont premiers entre eux deux à deux et divisent n, alors leur produit divise n.

Questions de cours de début d'heure

— **(TD)** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F. Dans ce cas : $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$, et si f est surjective : $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$. Inversement, si : $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour toute partie B de F, alors f est surjective.

— Existence de la factorisation première — pas l'unicité ! — **ET** infinité de l'ensemble des nombres premiers.

— Théorème de la division euclidienne — existence **ET** unicité.

— Théorème de Bézout en admettant l'existence d'une relation de Bézout : $a \wedge b = au + bv$ **ET** théorème de Gauss.