Combien de nombres premiers ?

Dans ce texte, la lettre p désignera toujours un nombre premier. Pour tout $x \geqslant 1$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x est noté $\pi(x)$: $\pi(x) = \left|\mathbb{P} \cap [1, x]\right| = \sum_{p \leqslant x} 1$. Le mathématicien russe Tchebychev obtint en 1848 l'encadrement fin suivant, qui porte aujourd'hui son nom.

Théorème (Inégalités de Tchebychev) Il existe des réels $A > 0$ et $B > 0$ pour lesquels pour tout $x \geqslant 2$:

$$A \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant B \frac{x}{\ln x}.$$

Tchebychev obtint même un peu plus.

Théorème (Tchebychev) Si la fonction $x \longmapsto \frac{\pi(x) \ln x}{x}$ possède une limite, cette limite vaut forcément 1.

En 1874, le mathématicien allemand Mertens établit trois théorèmes asymptotiques sur la répartition des nombres premiers. À défaut d'obtenir un équivalent de la somme $\pi(n) = \sum_{p \leqslant n} 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, il en obtint un de de sommes semblables.

Théorème (Théorèmes de Mertens)

- **Premier théorème de Mertens :** $\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \mathrm{O}(1)$.
- **Deuxième théorème de Mertens :** Il existe un réel δ pour lequel : $\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \ln \ln n + \delta + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.
- **Troisième théorème de Mertens :** $\prod_{p \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln n}$ où γ est la constante d'Euler.

Nous nous contenterons ici de démontrer les résultats de Tchebychev ainsi que les deux premiers théorèmes de Mertens.

Vingt ans plus tard, cela dit, en 1896, le mathématicien français Hadamard et le mathématicien belge de La Vallée-Poussin obtinrent indépendamment un équivalent de la fonction π au voisinage de $+\infty$ par des techniques d'*analyse complexe*. Ce résultat fondamental, dont toutes les preuves connues sont difficiles, est appelé le *théorème des nombres premiers*.

Théorème (Théorème des nombres premiers) $\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

De façon équivalente, le résultat donne un équivalent du $n^{\text{ème}}$ nombre premier p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème (Théorème des nombres premiers) $p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n$.

1 Comment démontrer ce genre de résultats ?!

Les nombres premiers ont en commun d'être premiers, mais cette propriété ne crée pas de lien clair entre eux à l'échelle individuelle, donc il n'est pas facile de les compter. Pourtant, si on veut estimer la taille de $\pi(n)$ pour n grand, il faut se donner les moyens d'avoir tous les nombres premiers inférieurs à n sous les yeux d'un seul coup.

Dans cette optique, la factorielle est le premier « objet collectif » vers lequel il paraît bon de se tourner. En effet, $n!$ est à la fois divisible par tous les nombres premiers inférieurs à n et raisonnablement simple à comprendre quand n est grand. Le problème, c'est qu'on ne risque pas de tirer grand-chose de l'inégalité $\prod_{p \leqslant n} p \leqslant n!$ tant elle est triviale ! Pour plus de finesse, intéressons-nous à la valuation p-adique de $n!$ pour tout p inférieur à n. Le résultat qui suit, très simple, a été publié par le mathématicien français Legendre en 1830.

Théorème **(Formule de Legendre)** Pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leqslant n$: $\quad v_p(n!) = \sum_{r=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor$.
La somme est faussement infinie car $\left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor = 0$ pour tout $r > \frac{\ln n}{\ln p}$.

Démonstration Soit $p \in \mathbb{P}$. Il y a exactement $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ entiers entre 1 et n qui sont divisibles par p, dont $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ sont divisibles par p^2, dont $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ sont divisibles par p^3, etc. La valuation p-adique de $n!$ est ainsi la somme de ces nombres $\left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor$, r décrivant $\mathbb{N}^*$.

Nous tirerons le premier théorème de Mertens de cette formule de Legendre et d'un encadrement simple de $n!$. Le deuxième théorème de Mertens en découlera sans idée arithmétique nouvelle.

Pour contourner le problème des valuations p-adiques de la factorielle, le mathématicien hongrois Erdös s'est intéressé en 1932 à un « objet collectif » semblable mais plus agréable à manipuler, le coefficient binomial $\binom{2n+1}{n+1} = \frac{(n+2)\ldots(2n+1)}{(n+1)!}$. Pourquoi ? Parce les nombres premiers compris entre $n+2$ et $2n+1$ divisent une fois chacun exactement cet entier, mais aussi parce qu'il est facile de majorer $\binom{2n+1}{n+1}$ par 2^{2n+1}. Nous tirerons de cette idée une majoration de la fonction π.

Pour minorer π, nous aurons recours à un autre « objet collectif », le PPCM $1 \vee 2 \vee \ldots \vee n$, mais l'idée sous-jacente est plus fine et nous la détaillerons le moment venu.

Et si on veut démontrer le théorème des nombres premiers ? En 1896, Hadamard et de La Vallée-Poussin l'ont fait, mais leur preuve, étonnamment, relevait de l'*analyse complexe*, théorie de la dérivation des fonctions par rapport à un nombre complexe. En 1949, à la surprise générale, Erdös et le mathématicien américain Selberg ont obtenu ensemble une preuve dite *élémentaire* du théorème des nombres premiers, élémentaire en ce sens qu'elle évitait l'analyse complexe, mais plus difficile en réalité. Leur preuve consistait plus ou moins à améliorer la preuve originale des inégalités de Tchebychev. En 1984, le mathématicien français Daboussi a proposé une autre preuve élémentaire du théorème des nombres premiers, dont les théorèmes de Mertens constituaient un ingrédient important.

Un dernier « objet collectif » mérite cependant d'être cité pour conclure, l'objet ultime en quelque sorte, sur lequel les preuves de Hadamard et de La Vallée-Poussin reposent. Cet objet est une fonction, la *fonction* ζ, définie pour tout $s > 1$ par la relation $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Quel rapport avec les nombres premiers ? En 1737, le mathématicien suisse Euler est le premier à comprendre qu'un lien unit ζ aux nombres premiers. Conforme aux standards de l'époque, son travail manquait de rigueur, mais n'en fut pas moins décisif. Par existence et unicité de la factorisation première :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ces égalités mériteraient de vraies justifications, mais peu importe ici. L'identité obtenue suggère que la fonction ζ porte en son sein le théorème de factorisation première lui-même. Ainsi, en comprenant ζ, on a peut-être une chance d'en savoir plus sur les nombres premiers. La relation suivante encourage la même approche :

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t\left(t^s - 1\right)}\, \mathrm{d}t.$$

Mais alors où sont les nombres complexes dont Hadamard et de La Vallée-Poussin se sont servis dans leur preuve ? En réalité, la définition de $\zeta(s)$ donnée plus haut peut être énoncée pour tout $s \in \mathbb{C}$ pour lequel $\mathrm{Re}(s) > 1$ si on pose $\frac{1}{n^s} = \mathrm{e}^{-s \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Attention, l'exponentielle est complexe ici. La somme infinie qui définit ζ n'a en revanche pas de sens si $\mathrm{Re}(s) \leqslant 1$, mais on parvient quand même à *prolonger analytiquement* ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Le prolongement en question est très spécial, il est unique et cette unicité garantit que le lien qui unit ζ aux nombres premiers sur $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\right\}$ est maintenu d'une manière ou d'une autre sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tout entier. Ce travail de prolongement a été effectué pour la première fois par le mathématicien allemand Riemann en 1859, mais dans le même article, Riemann développe surtout l'idée que la répartition des nombres premiers est intimement liée à celle des zéros de ζ dans le plan complexe. Cette découverte majeure est le point de départ de la plupart des preuves du théorème des nombres premiers.

Plus finement, Riemann a conjecturé que les zéros dits *non triviaux* de la fonction ζ sont tous situés sur la droite d'équation $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. La fonction ζ s'annule aussi en $-2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, mais ces zéros dits *triviaux* sont peu utiles. L'*hypothèse de Riemann* est encore une conjecture aujourd'hui, l'une des plus importantes, et sa preuve raffinerait considérablement le théorème des nombres premiers.

2 Les inégalités de Tchebychev

Dans cette partie, nous montrons la version suivante des inégalités de Tchebychev.

Théorème (Inégalités de Tchebychev) Pour tout $n \geqslant 4$: $\dfrac{n}{\ln n}\ln 2 \leqslant \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\dfrac{n}{\ln n}$.

2.1 Majoration de la fonction π

Théorème Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\pi(n)\,! \leqslant 4^n$.

Démonstration La preuve qui suit, proposée par le mathématicien hongrois Erdös, date de 1932.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2n+1\\ p>n+1}} p$ est premier à $n!$ et divise $\displaystyle\prod_{k=n+2}^{2n+1} k = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = n!\binom{2n+1}{n+1}$, donc aussi $\dbinom{2n+1}{n+1}$ d'après le théorème de Gauss. En résumé, un argument trivial d'arithmétique a montré l'essentiel, à savoir que $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2n+1\\ p>n+1}} p \leqslant \binom{2n+1}{n+1}$. A fortiori, $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2n+1\\ p>n+1}} p \leqslant 4^n$ car :
$$2\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1} = 2.4^n.$$
- Montrons à présent que $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation :** Évidente pour $n \in [\![0,2]\!]$.

  Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\displaystyle\prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

  — Si $n+1$ est pair, il n'est pas premier, donc $\displaystyle\prod_{p\leqslant n+1} p = \prod_{p\leqslant n} p \overset{\text{HDR}}{\leqslant} 4^n \leqslant 4^{n+1}$.

  — Si $n+1$ est impair, disons $n+1 = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$:
$$\prod_{p\leqslant n+1} p = \prod_{p\leqslant m+1} p \times \prod_{\substack{p\leqslant 2m+1\\ p>m+1}} p \overset{\text{HDR}}{\leqslant} 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1} = 4^{n+1}.$$
- Pour finir, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p_k le $k^{\text{ème}}$ nombre premier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Clairement, $p_k \geqslant k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc $\displaystyle\pi(n)\,! = \prod_{k=1}^{\pi(n)} k \leqslant \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k = \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n$.

Théorème Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n!$. Par ailleurs : $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \mathrm{O}(\ln n)$

Démonstration Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln t\ \mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$, donc pour tout $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k \leqslant \int_1^n \ln t\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1) = \sum_{k=1}^{n}\ln k,$$
puis après calcul : $\ln(n!) - \ln n \leqslant \big[t\ln t - t\big]_{t=1}^{t=n} = n\ln n - n + 1 \leqslant \ln(n!)$. Réécrivons un peu ce résultat :
$$1 \leqslant \ln(n!) - n\ln n + n \leqslant \ln n + 1.$$
Comme voulu : $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \mathrm{O}(\ln n)$. Par ailleurs, $\ln(n!) \geqslant n\ln n - n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y compris pour $n = 1$, donc $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e} \geqslant \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ après passage à l'exponentielle.

Théorème Pour tout $n \geqslant 2$: $\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\dfrac{n}{\ln n}$.

Démonstration Primitive du logarithme, la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x\ln x - x$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après nos résultats précédents, pour tout $n \geqslant 2$:

$$f\big(\pi(n)\big) = \pi(n)\ln\pi(n) - \pi(n) = \ln\left(\frac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)^{\pi(n)} \leqslant \ln\big(\pi(n)!\big) \leqslant \ln 4^n = n\ln 4.$$

Ensuite, pour tout $x > 1$: $f\left(\frac{\mathrm{e}x}{\ln x}\right) - (\mathrm{e}-1)\,x = \frac{\mathrm{e}x}{\ln x}\left(\ln\frac{\mathrm{e}x}{\ln x} - 1\right) - (\mathrm{e}-1)\,x = x\left(1 - \mathrm{e}\,\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)$, or $\ln\ln x = \ln\frac{\ln x}{\mathrm{e}} + 1 \leqslant \left(\frac{\ln x}{\mathrm{e}} - 1\right) + 1 = \frac{\ln x}{\mathrm{e}}$, donc $f\left(\frac{\mathrm{e}x}{\ln x}\right) - (\mathrm{e}-1)x \geqslant 0$. Finalement, pour tout $n \geqslant 2$:

$$f\big(\pi(n)\big) \leqslant n\ln 4 \leqslant (\mathrm{e}-1)n \leqslant f\left(\frac{\mathrm{e}n}{\ln n}\right),$$

et la stricte croissance de f fournit la conclusion souhaitée.

2.2 Minoration de la fonction π

Théorème Pour tout $n \geqslant 7$: $1 \vee 2 \vee \ldots \vee n \geqslant 2^n$.

Démonstration On pose $\Delta_n = 1 \vee 2 \vee \ldots \vee n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Clairement, Δ_n divise Δ_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour certains $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k}$ par décomposition en éléments simples. Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, après multiplication par $X+k$ et évaluation en $-k$:
$$a_k = \frac{1}{(-k)\ldots(-1)\times 1\ldots(n-k)} = \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{n!}\binom{n}{k},$$
donc $\frac{n!}{X(X+1)\ldots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{X+k}$, puis pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{m\binom{m+n}{m}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k}$.
Multiplions maintenant par l'entier Δ_{m+n}, divisible par $m, m+1,\ldots,m+n$. Il en découle que $\frac{\Delta_{m+n}}{m\binom{m+n}{m}}$ est un entier, i.e. que $m\binom{m+n}{m}$ divise Δ_{m+n}.
Ce résultat de divisibilité est vraiment un petit bijou. Pour montrer que l'entier d divise le PPCM $k_1 \vee \ldots \vee k_r$, nous avons écrit $\frac{1}{d}$ comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r}$: $\sum_{i=1}^{r}\frac{u_i}{k_i} = \frac{1}{d}$.
- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_{2n+1} est divisible par les deux entiers $n\binom{n+(n+1)}{n} = n\binom{2n+1}{n}$ et $(n+1)\binom{(n+1)+n}{n+1} = (n+1)\binom{2n+1}{n+1} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$, donc par leur PPCM $n(n+1)\binom{2n+1}{n}$, n et $n+1$ étant premiers entre eux. Conclusion : $\Delta_{2n+1} \geqslant n(n+1)\binom{2n+1}{n}$.
- À présent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{n} \leqslant (2n+2)\binom{2n+1}{n}$, donc $\Delta_{2n+1} \geqslant \frac{n(n+1)}{2n+2}\,2^{2n+1} = 2^{2n}n$. Ainsi $\Delta_{2n+1} \geqslant 2^{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$, donc $\Delta_n \geqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 5$ impair.
- Enfin, pour tout $n \geqslant 10$ pair, disons $n = 2k+2$ avec $k \geqslant 4$: $\Delta_n = \Delta_{2k+2} \geqslant \Delta_{2k+1} \geqslant 2^{2k}k \geqslant 2^{2k+2} = 2^n$. Dernier cas à traiter : $\Delta_8 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \geqslant 2^8$ car $3\times 5\times 7 \geqslant 2^5$.

Théorème Pour tout $n \geqslant 4$: $\pi(n) \geqslant \frac{n}{\ln n}\ln 2$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \vee 2 \vee \ldots \vee n = \prod_{p\leqslant n} p^{\max\{v_p(1),\ldots,v_p(n)\}}$ avec $p^{v_p(k)} \leqslant n$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, i.e. $v_p(k) \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}$, donc pour tout $n \geqslant 7$: $2^n \leqslant 1\vee 2\vee\ldots\vee n \leqslant \prod_{p\leqslant n} p^{\frac{\ln n}{\ln p}} = \prod_{p\leqslant n} n = n^{\pi(n)}$, donc $\pi(n) \geqslant \frac{n}{\ln n}\ln 2$.
Pour finir, l'inégalité reste vraie si $n \in \{4,5,6\}$ car $\pi(4) = 2$ et $\pi(5) = \pi(6) = 3$.

Encadrement du $n^{\text{ème}}$ nombre premier

Théorème Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad e^{-1} n \ln n \leqslant p_n \leqslant \dfrac{2}{\ln 2} n \ln n.$

Démonstration Le point important, c'est que les fonctions $n \longmapsto p_n$ et $p \longmapsto \pi(p)$ sont réciproques l'une de l'autre. En d'autres termes, $\pi(p_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_{\pi(p)} = p$ pour tout $p \in \mathbb{P}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après nos résultats précédents : $\quad \pi(p_n) = n \leqslant e \dfrac{p_n}{\ln p_n} \quad$ car $p_n \geqslant 2$. Cela dit, $p_n \geqslant n$ donc $p_n \geqslant e^{-1} n \ln p_n \geqslant e^{-1} n \ln n$.
- Ensuite, soit $n \geqslant 4$. D'après nos résultats précédents : $\quad \dfrac{p_n}{\ln p_n} \ln 2 \leqslant \pi(p_n) = n, \quad$ or une simple étude de fonction montre que $x \ln 2 \geqslant 2 \ln x$ pour tout $x \geqslant 4$, donc $\dfrac{p_n}{\ln p_n} \leqslant \dfrac{n}{\ln 2} \leqslant \dfrac{n^2}{2 \ln n} = \dfrac{n^2}{\ln\left(n^2\right)}$. Il en découle que $p_n \leqslant n^2$ par stricte croissance de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln x}$ sur $[e, +\infty[$, donc $\ln p_n \leqslant 2 \ln n$. Finalement :
$$p_n \leqslant \frac{n \ln p_n}{\ln 2} \leqslant \frac{2}{\ln 2} n \ln n.$$

3 Les théorèmes de Mertens

3.1 Premier théorème de Mertens

Théorème **(Premier théorème de Mertens)** $\quad \displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + O(1).$

Démonstration Soit $n \geqslant 2$.

- Fixons $p \in \mathbb{P}$. Rappelons que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc d'après la formule de Legendre :
$$\frac{n}{p} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leqslant v_p(n!) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}} \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor \leqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}} \frac{n}{p^r} \leqslant \frac{n}{p} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{n}{p^r} \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} \times \frac{1}{1 - p^{-1}} \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$
En résumé : $\quad \dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}.$
- Remarquons ensuite que les diviseurs premiers de $n!$ sont tous inférieurs ou égaux à n, donc la factorisation première de $n!$ s'écrit $n! = \displaystyle\prod_{p \leqslant n} p^{v_p(n!)}$. Passons cette égalité au logarithme, puis encadrons :
$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p = \sum_{p \leqslant n} \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \ln p \leqslant \ln(n!) = \sum_{p \leqslant n} v_p(n!) \ln p \leqslant \sum_{p \leqslant n} \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \right) \ln p = n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}.$$
En résumé : $\quad -\displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leqslant \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(n!)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{p \leqslant n} \ln p.$
- Dans cette inégalité, le majorant peut être majoré « facilement » grâce à un résultat des paragraphes précédents : $\quad \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{p \leqslant n} \ln p = \frac{1}{n} \ln \prod_{p \leqslant n} p \leqslant \frac{1}{n} \ln 4^n = \ln 4. \quad$ La minoration du minorant est plus délicate.
$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k(k-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{2^n} \frac{\ln k}{k(k-1)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} \frac{\ln k}{k(k-1)} \leqslant \ln 2 \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} \frac{1}{k(k-1)}$$
$$= \ln 2 \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \ln 2 \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i} \right) = \ln 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{i-1}{2^{i-1}} - \frac{i}{2^i} \right)$$
$$= \ln 2 \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \right) \leqslant 2 \ln 2 = \ln 4.$$
Conclusion : $\quad \left| \displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(n!)}{n} \right| \leqslant \ln 4. \quad$ En particulier : $\quad \displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\ln(n!)}{n} + O(1). \quad$ Cela dit, nous avons montré plus haut que $\ln(n!) \underset{n \to +\infty}{=} n \ln n - n + O(\ln n) \underset{n \to +\infty}{=} n \ln n + O(n)$, donc $\dfrac{\ln(n!)}{n} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + O(1)$ et le premier théorème de Mertens est démontré.

3.2 Deuxième théorème de Mertens

Le deuxième théorème de Mertens découle du premier, qu'on soumet à une technique de sommation classique dite *sommation d'Abel*.

Théorème (Sommation d'Abel) Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ une suite réelle et $f\in\mathscr{C}^1\big([2,+\infty[,\mathbb{R}\big)$.
On pose $U(x)=\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant x}u_k$ pour tout $x\geqslant 2$. Alors pour tout $n\geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k f(k)=U(n)f(n)-\int_2^n U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Eh oui, la sommation d'Abel n'est qu'une forme d'intégration par parties !

Démonstration Pour tout $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\int_2^n U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t&=\sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=2}^{n-1}U(k)\int_k^{k+1}f'(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=2}^{n-1}U(k)\big(f(k+1)-f(k)\big)\\&=\sum_{k=2}^{n-1}U(k)f(k+1)-\sum_{k=2}^{n-1}U(k)f(k)=\sum_{k=3}^{n}U(k-1)f(k)-\sum_{k=2}^{n-1}U(k)f(k)\\&=U(n)f(n)-U(2)f(2)-\sum_{k=3}^{n}\big(U(k)-U(k-1)\big)f(k)=U(n)f(n)-u_2f(2)-\sum_{k=3}^{n}u_kf(k)\\&=U(n)f(n)-\sum_{k=2}^{n}u_kf(k).\end{aligned}$$

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Théorème Soit $a\in\mathscr{C}\big([2,+\infty[,\mathbb{R}\big)$. Si la suite $\left(\displaystyle\int_2^n\big|a(t)\big|\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est majorée, la suite $\left(\displaystyle\int_2^n a(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

Démonstration Posons $u_n=\displaystyle\int_2^n\big|a(t)\big|\,\mathrm{d}t$ et $v_n=\displaystyle\int_2^n\Big(a(t)+\big|a(t)\big|\Big)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\geqslant 2$. Sachant que $a+|a|\leqslant 2\,|a|$ sur $[2,+\infty[$, $v_n\leqslant u_n$ pour tout $n\geqslant 2$, donc $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est majorée. Cela dit, $|a|\geqslant 0$ et $a+|a|\geqslant 0$ sur $[2,+\infty[$, donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(u_n)_{n\geqslant 2}$ sont croissantes. Croissantes majorées, elles convergent toutes les deux d'après le théorème de la limite monotone. A fortiori, $(v_n-u_n)_{n\geqslant 2}$ converge et c'est le résultat voulu.

Théorème (Deuxième théorème de Mertens) Il existe un réel δ pour lequel : $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\underset{n\to+\infty}{=}\ln\ln n+\delta+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.

On peut montrer que $\delta=\gamma+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\mu(n)\,\frac{\ln\zeta(n)}{n}$, mais il faut travailler plus. Dans cette égalité, $\mu(n)$ vaut $(-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers distincts et 0 si n est divisible par le carré d'au moins un nombre premier. On appelle μ la *fonction de Möbius*.

Démonstration (du deuxième théorème de Mertens) Procédons à une sommation d'Abel à partir de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}=\left(\dfrac{\ln n}{n}\,\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)\right)_{n\geqslant 2}$ et de la fonction $x\overset{f}{\longmapsto}\dfrac{1}{\ln x}$. Pour tout $n\geqslant 2$:

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^n u_kf(k)=U(n)f(n)-\int_2^n U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln n}\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p}+\int_2^n\frac{1}{t\,(\ln t)^2}\left(\sum_{p\leqslant t}\frac{\ln p}{p}\right)\mathrm{d}t.$$

Posons maintenant $V(x)=\displaystyle\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-\ln x$ pour tout $x\geqslant 2$. D'après le premier théorème de Mertens, V est bornée sur $[2,+\infty[$, disons par un certain K, donc pour tout $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}&=\frac{\ln n+V(n)}{\ln n}+\int_2^n\frac{\ln t+V(t)}{t\,(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t=1+\frac{V(n)}{n}+\int_2^n\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}+\int_2^n\frac{V(t)}{t\,(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\ln\ln n\;+\;\underbrace{1-\ln\ln 2+\frac{V(n)}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\,1-\ln\ln 2}\;+\;\underbrace{\int_2^n\frac{V(t)}{t\,(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t.}_{\text{Notons } r_n \text{ cette intégrale.}}\end{aligned}$$

À présent, pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_2^n \frac{|V(t)|}{t\,(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant K\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^2} = K\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}\right) \leqslant \frac{K}{\ln 2}$, donc $(r_n)_{n\geqslant 2}$ converge d'après le lemme précédent. En notant ℓ sa limite : $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln\ln n + 1 - \ln\ln 2 + \ell + \mathrm{o}(1)$ et le deuxième théorème de Mertens est démontré.

Tant qu'on y est, la sommation d'Abel justifie rapidement une identité relative à la fonction ζ que nous avons énoncée sans preuve au paragraphe **1**. Fixons $s > 1$ et procédons à une sommation d'Abel à partir de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2} = \big(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)\big)_{n\geqslant 2}$ et de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^s}\right)$. Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\ln\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p\leqslant n}\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{k=2}^n u_k f(k) = U(n)f(n) - \int_2^n U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \pi(n)\,\ln\left(1-\frac{1}{n^s}\right) - s\int_2^n \frac{\pi(t)}{t\left(t^s-1\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\pi(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^s}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^s}$, donc $\pi(n)\,\ln\left(1-\dfrac{1}{n^s}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{s-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ car $s > 1$. Par conséquent, à condition de justifier proprement la convergence du produit à gauche et de l'intégrale à droite :

$$\ln\zeta(s) = \ln\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = s\int_2^{+\infty}\frac{\pi(t)}{t\left(t^s-1\right)}\,\mathrm{d}t.$$

4 Le théorème conditionnel de Tchebychev

Théorème (Intégration des équivalents) Soient $a, b \in \mathscr{CM}\big([2,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ strictement positives.

Si $a(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} b(x)$ et si $\displaystyle\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\displaystyle\int_2^x a(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{a(x)-b(x)}{b(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe un réel $B \geqslant 2$ pour lequel pour tout $x > B$: $\big|a(x)-b(x)\big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,b(x)$. Par conséquent, pour tout $x > B$:

$$\begin{aligned}\left|\int_2^x a(t)\,\mathrm{d}t - \int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_2^x \big(a(t)-b(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_2^B \big(a(t)-b(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| + \int_B^x \big|a(t)-b(t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left|\int_2^B \big(a(t)-b(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_B^x b(t)\,\mathrm{d}t \overset{b\geqslant 0}{\leqslant} \left|\int_2^B \big(a(t)-b(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_2^x g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Cela dit, $\displaystyle\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par hypothèse, donc il existe un réel $B' \geqslant 2$ pour lequel pour tout $x > B'$: $\displaystyle\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\left|\int_0^B \big(a(t)-b(t)\big)\,\mathrm{d}t\right|$. Finalement, pour tout $x \geqslant \max\left\{B, B'\right\}$:

$$\left|\int_2^x a(t)\,\mathrm{d}t - \int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc $\displaystyle\int_2^x a(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x b(t)\,\mathrm{d}t$.

Le théorème suivant de Tchebychev sera notre résultat le plus abouti en vue du théorème des nombres premiers.

Théorème (Tchebychev) Si la fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi(x)\ln x}{x}$ possède une limite, cette limite vaut forcément 1.

Démonstration Faisons l'hypothèse que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi(x)\ln x}{x}$ possède une limite ℓ, de fait comprise entre $\ln 2$ et e d'après nos travaux précédents. De nouveau, procédons à une sommation d'Abel, mais cette fois à partir de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2} = \big(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)\big)_{n\geqslant 2}$ et de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{\ln x}{x}$. Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} = \sum_{k=2}^n u_k f(k) = U(n)f(n) - \int_2^n U(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\pi(n)\ln n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ell} + \int_2^n \pi(t)\,\frac{\ln t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Observons maintenant que par hypothèse : $\pi(x)\,\dfrac{\ln x-1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\ell x}{\ln x}\times\dfrac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\ell}{x}$. En outre, les fonctions $x\longmapsto \pi(x)\,\dfrac{\ln x-1}{x^2}$ et $x\longmapsto\dfrac{\ell}{x}$ sont strictement positives et $\displaystyle\int_2^x \frac{\ell}{t}\,\mathrm{d}t = \ell\big(\ln x-\ln 2\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc : $\displaystyle\int_2^n \pi(t)\,\frac{\ln t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{\ell}{t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\ln n$ par intégration des équivalents. Conclusion :

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \big(\ell+\mathrm{o}(1)\big)+\big(\ell\ln n+\mathrm{o}(\ln n)\big) \underset{n\to+\infty}{=} \ell\ln n+\mathrm{o}(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\ln n.$$

D'un autre côté, $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ d'après le premier théorème de Mertens, donc $\ell=1$. ■