Christophe Bertault

La géométrie hyperbolique du demi-plan de Poincaré en MPSI

Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre,
elle peut simplement être plus commode.
Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse* (1917)

1 Qu'est-ce qu'une géométrie ?

1.1 Un peu d'histoire

Au début du 3ème siècle avant J.-C., les mathématiques sont pour la première fois dans l'histoire dotées d'un fondement axiomatique par le mathématicien Euclide. Ses treize livres, qu'on appelle les *Éléments* d'Euclide, traitent de géométrie plane, de géométrie dans l'espace, de calcul et d'arithmétique. Au livre I, Euclide commence par définir quelques notions élémentaires (*point*, *segment*, *droite*, *droites parallèles*, *cercle*, *angle*...), puis il fonde sa géométrie plane sur cinq *postulats* :

Premier postulat : Deux points définissent un et un seul segment.

Deuxième postulat : Tout segment entre deux points peut être prolongé en une et une seule droite.

Troisième postulat : Un point et une longueur définissent un et un seul cercle.

Quatrième postulat : Tous les angles droits sont égaux.

Cinquième postulat : Par un point, il passe toujours une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

Ces définitions et postulats permettent à Euclide d'énoncer et de démontrer ensuite une foule de théorèmes. La rigueur de son entreprise paraît toute relative aujourd'hui et peut nous faire sourire. Il n'en demeure pas moins que les *Éléments* d'Euclide sont l'un des textes les plus importants de l'histoire des idées et que les mathématiciens contemporains sont tous des héritiers d'Euclide.

Au cours des siècles qui suivent, de nombreux mathématiciens ont le sentiment que le cinquième postulat sur les parallèles n'est pas un vrai postulat et qu'il peut être déduit des quatre autres. Au 11ème siècle, le mathématicien perse Omar Khayyām tente une réfutation du cinquième postulat par l'absurde — qui n'aboutit pas. Au 17ème siècle, le mathématicien italien Saccheri (1667-1733) consacre sa vie en vain à la même entreprise. Il n'était d'ailleurs pas loin de découvrir un modèle de géométrie hyperbolique, mais ses propres travaux l'ont effrayé et il n'a pas osé les mener à leur terme. En 1813, le mathématicien allemand Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est le premier à envisager la possibilité de géométries non euclidiennes — c'est-à-dire de géométries planes qui respectent les quatre premiers postulats d'Euclide mais pas le cinquième — mais il ne publie aucun texte à ce sujet, « par crainte des cris des Béotiens » pour reprendre ses termes. Il reviendra au mathématicien russe Nikolaï Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856) et au mathématicien hongrois János Bolyai (1802-1860) de proposer indépendamment en 1829 et 1832 chacun un modèle assumé de géométrie non euclidienne. De nombreux modèles plus pratiques de géométries non euclidiennes ont fleuri par la suite, notamment ceux du mathématicien italien Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1868, du mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925) en 1871 et du mathématicien français Henri Poincaré (1854-1912) en 1882.


Euclide


Henri Poincaré

L'histoire est une chose, mais conceptuellement, c'est quoi *une géométrie* ? On peut répondre de bien des manières à cette question selon le degré de généralité visé. En ce qui nous concerne, par quel genre de preuve pourrions-nous démontrer que le cinquième postulat d'Euclide ne découle pas des quatre autres dans le cadre de la géométrie plane ? La réponse à cette question a mis des millénaires à germer, mais elle est relativement élémentaire après coup. Une idée simple peut rester longtemps dans l'ombre si sa forme est trop inhabituelle et requiert de l'imagination.

La géométrie plane usuelle, dite *euclidienne*, décrit les propriétés d'un ensemble d'objets (points, droites...) qui satisfait certaines contraintes (postulats). On dit **LA** géométrie (plane) euclidienne, mais il est parfaitement clair que les plans de l'espace usuel à trois dimensions se valent tous. Tout plan de l'espace est appelé un *modèle* de géométrie (plane) euclidienne. Un modèle est un exemple, si vous voulez. Plus généralement, tout ensemble d'objets quel qu'il soit qui satisfait les contraintes de la géométrie euclidienne est appelé un *modèle* de géométrie euclidienne.

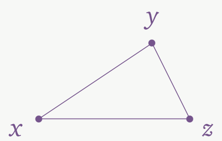
Au contraire, tout ensemble d'objets qui satisfait les quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne **MAIS QUI CONTREVIENT AU CINQUIÈME** est appelé un modèle de géométrie **NON** euclidienne. Un idée forte se dégage de tout ceci. Pour montrer que le cinquième postulat d'Euclide ne découle pas des quatre autres, il nous suffit d'exhiber un modèle de géométrie non euclidienne, du moins s'il en existe. En d'autres termes, pour montrer que le cinquième postulat d'Euclide ne découle pas **TOUJOURS** des quatre autres, il est suffisant de trouver un **CONTRE-EXEMPLE**, i.e. un modèle alternatif. Quelle idée simple après coup ! Mais il fallait pour y penser aller au bout de la démarche axiomatique d'Euclide, abandonner le singulier de **LA** géométrie euclidienne et accepter la pluralité du concept de modèle. Plus simplement, pour montrer que le cinquième postulat de la géométrie plane usuelle ne découle pas des quatre autres, il fallait chercher... ailleurs que dans le plan usuel !

1.2 Le vocabulaire des espaces métriques

Armés de ces distinctions, nous sommes en mesure de formaliser davantage le problème. Les définitions qui suivent appartiennent à la branche des mathématiques qu'on appelle *topologie* (étymologiquement « lieu-étude »). En quelques mots, la topologie est la théorie de la proximité entre les objets mathématiques, des objets qui peuvent être tout et n'importe quoi et dont la proximité est autant définie qu'étudiée par la théorie.

Définition (Distance, espace métrique) Soit X un ensemble quelconque. On appelle *distance sur X* toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les assertions suivantes :

- **Positivité :** $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) \geqslant 0.$
- **Symétrie :** $\forall x, y \in X, \quad d(y,x) = d(x,y).$
- **Séparation :** $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y.$
- **Inégalité triangulaire :** $\forall x, y, z \in X, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$



Le couple (X,d) est alors appelé un *espace métrique*.

On dit souvent pour abréger que l'ensemble X lui-même est un espace métrique, mais c'est un abus de langage.

Exemple L'application $(x,y) \longmapsto |x-y|$ est évidemment une distance sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), de même que l'application :

$$\big((x,y),(x',y')\big) \longmapsto \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

Exemple Pour tout espace métrique (X,d) et toute partie Y de X, $\big(Y, d_{|Y\times Y}\big)$ est aussi un espace métrique. Ainsi, toute partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ peut être vue comme un espace métrique de plein droit par restriction de la distance usuelle $(x,y) \longmapsto |x-y|$.

Définition (Boule ouverte, voisinage) Soient X un espace métrique et $y \in X$.

- **Boule ouverte :** Soit $r > 0$. L'ensemble $\Big\{x \in X \;\Big|\; d(x,y) < r\Big\}$ est appelé la *boule ouverte de centre y et de rayon r*.
- **Voisinage :** On appelle *voisinage de y* toute partie de X qui contient une boule ouverte de centre y.

  On notera dans ce texte $\mathscr{V}_X(y)$ l'ensemble des voisinages de y.

  Deux propriétés des voisinages :

  — Toute intersection finie de voisinages de y est un voisinage de y.

  — Toute partie de X qui contient un voisinage de y est elle-même un voisinage de y.

Toute boule ouverte de centre y est un voisinage de y, mais la réciproque est fausse.

Dans $\mathbb{R}$, les boules ouvertes sont des intervalles ouverts, et dans $\mathbb{C}$, ce sont exactement les disques ouverts.

Définition **(Isométrie, fonction continue, homéomorphisme)** Soient (X,d) et (X',d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow X'$ une application.

- **Isométrie :** On dit que f est une *isométrie* (*de* X *sur* X') si f est une bijection de X sur X' et si pour tous $x,y \in X$:
$$d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y).$$
On dit que X' est *isométrique à* X s'il existe une isométrie de X sur X'. La relation *être isométrique à* ainsi définie est une relation d'équivalence sur la classe des espaces métriques.
- **Fonction continue :** On dit que f est *continue* (*sur* X) si :
$$\forall y \in X, \quad \forall V' \in \mathcal{V}_{X'}\big(f(y)\big), \quad \exists V \in \mathcal{V}_X(y), \quad f(V) \subset V'.$$
i.e. si : $\quad \forall y \in X, \quad \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \qquad d(x,y) < \alpha \quad \Longrightarrow \quad d'\big(f(x),f(y)\big) < \varepsilon.}_{\text{Par définition, ceci signifie que } f \text{ est continue en } y.}$
- **Homéomorphisme :** On dit que f est un *homéomorphisme* (*de* X *sur* X') si f est bijective de X sur X' et continue sur X et si f^{-1} est continue sur X'.

  On dit que X' est *homéomorphe à* X s'il existe un homéomorphisme de X sur X'. La relation *être homéomorphe à* ainsi définie est une relation d'équivalence sur la classe des espaces métriques.

Les isométries (étymologiquement « même mesure ») sont les applications qui préserve les distances.

Deux espaces métriques sont isométriques quand on peut passer de l'un à l'autre en préservant parfaitement les distances et homéomorphes quand le second est une déformation bijective bicontinue du premier, i.e. quand on peut passer bijectivement de l'un à l'autre sans aucun déchirement.

Toute isométrie est un homéomorphisme, mais la réciproque est fausse.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ de réciproque $x \longmapsto \dfrac{x}{1-|x|}$. On peut donc déformer bijectivement et bicontinûment $\mathbb{R}$ pour le transformer en $]-1,1[$. Il est cependant impossible de le faire de façon isométrique, i.e. en préservant les distances, car les points de $]-1,1[$ sont à distance au plus 2 les uns des autres alors que $\mathbb{R}$ contient des points aussi distants que l'on veut l'un de l'autre.

Exemple

- La fonction $z \longmapsto \dfrac{z}{1+|z|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, donc ce disque et $\mathbb{C}$ sont homéomorphes. En revanche, ils ne sont pas isométriques.
- Le carré $[-1,1]+i[-1,1]$ et le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 sont homéomorphes. La fonction f définie par $f(0)=0$ et pour tout $z \in [-1,1]+i[-1,1]$: $\quad f(z) = \dfrac{z}{|z|} \times \max\Big\{\big|\mathrm{Re}(z)\big|, \big|\mathrm{Im}(z)\big|\Big\}$ $\quad$ est en effet un homéomorphisme du carré sur le disque.

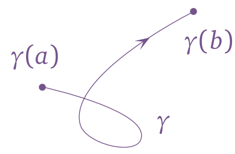
Définition **(Surface)** On appelle *surface* tout espace métrique dont tout point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}^2$).

Une surface est un espace métrique « localement de dimension 2 », i.e. qui ressemble à un plan au voisinage de chaque point. Par exemple, les sphères et les tores sont des surfaces.

Pour comprendre un espace métrique de l'intérieur, il est souvent utile de s'y promener et nous allons beaucoup nous promener dans ce texte le long de ce qu'on appelle des *courbes paramétrées*.

Définition (Courbe paramétrée, espace métrique géodésique) Soit X un espace métrique.

- **Courbe paramétrée :** Soient $x, y \in X$. On appelle *courbe paramétrée de X d'origine x et d'extrémité y* toute application continue γ de $[a,b]$ dans X, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$, pour laquelle $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$.
- **Espace métrique géodésique :** On dit que X est *géodésique* si pour tous $x, y \in X$, il existe une courbe paramétrée $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ d'origine x et d'extrémité y qui est aussi une isométrie de $[a,b]$ sur son image $\gamma\big([a,b]\big)$.
  En particulier : $\quad d(x,y) = d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) = b - a$.



Toute courbe paramétrée $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ d'origine x et d'extrémité y peut être vue comme la trajectoire d'un mobile qui, à l'instant $t \in [a,b]$, se trouve en position $\gamma(t)$ dans X. Initialement situé en $x = \gamma(a)$, le mobile se déplace continûment dans X et finit sa course en $y = \gamma(b)$.

En termes plus intuitifs, un espace métrique est géodésique quand deux points quelconques x et y peuvent toujours y être reliés par une ficelle inélastique de longueur $d(x,y)$. Le segment $[a,b]$ joue le rôle d'une ficelle de longueur $d(x,y) = b - a$, il habite officiellement dans $\mathbb{R}$, mais la courbe paramétrée γ le transporte isométriquement, i.e. de façon inélastique, en une ficelle de même longueur qui relie x à y dans X. La notion de *longueur* d'une courbe paramétrée est ici évoquée sans rigueur aucune, mais les choses seront bientôt plus claires.

Exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes. Quand on retire un point à $\mathbb{R}$, on le casse tellement bien en deux qu'on ne peut plus relier continûment tout point à tout point. Priver $\mathbb{C}$ d'un point n'a pas du tout le même effet car il est facile de contourner un point dans $\mathbb{C}$ quand on veut relier continûment un point à un autre. Tâchons cependant d'être plus rigoureux.

Démonstration Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ et posons $a = f^{-1}(0)$. La restriction $f|_{\mathbb{C} \setminus \{a\}}$ est alors un homéomorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ sur $\mathbb{R}^*$, et par bijectivité, nous pouvons nous donner deux nombres complexes $z^-, z^+ \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ pour lesquels $f(z^-) = -1$ et $f(z^+) = 1$. Or il est facile de construire une courbe paramétrée $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ d'origine z^- et d'extrémité z^+ — si a le permet, on va en ligne droite, et sinon on contourne a. La composée $f \circ \gamma$ est alors continue sur $[-1,1]$ avec $f \circ \gamma(-1) = f(z^-) = -1$ et $f \circ \gamma(1) = f(z^+) = 1$. Le TVI l'oblige donc à atteindre 0 alors qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ — contradiction !

Définition (Espace métrique 2-homogène) Soit X un espace métrique. On dit que X est *2-homogène* si pour tous $x, y, x', y' \in X$ pour lesquels $d(x,y) = d(x',y')$, il existe une isométrie $f : X \longrightarrow X$ pour laquelle $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$.

Les théorèmes de la géométrie plane euclidienne sont vrais partout de la même manière, ils ne sont pas vrais dans telle partie du plan et faux dans telle autre. Cela tient au fait que les configurations étudiées d'une région donnée (droites, cercles, triangles...) peuvent toujours être ramenées aux configurations analogues d'une autre région par une isométrie. Les cercles de rayon donné ont tous les mêmes propriétés car ils sont tous superposables les uns sur les autres à isométrie près. Dans cette optique, un espace métrique est 2-homogène quand les configurations de deux points distants d'un même réel positif se valent toutes à isométrie près.

Les définitions qui précèdent nous permettent enfin d'énoncer un résultat majeur dont la démonstration repose sur des théorèmes profonds et très difficiles du 20$^{\text{ème}}$ siècle.

Théorème (Classification des surfaces géodésiques 2-homogènes à isométrie près) Toute surface géodésique 2-homogène est isométrique à l'un des espaces métriques suivants :

- le plan euclidien $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}^2$),
- une sphère ou bien la drôle de surface qu'on obtient à partir d'une sphère quand on identifie brutalement tout point au point diamétralement opposé,
- le *demi-plan de Poincaré* muni de la distance hyperbolique que nous nous apprêtons à étudier (à un facteur multiplicatif près).

Les trois types de géométries obtenues sont appelés respectivement des modèles de géométrie *euclidienne*, *sphérique* et *hyperbolique*. La suite de ce texte est consacrée à la définition et à l'étude du *demi-plan de Poincaré*, mais nous commencerons dans un premier temps par nous intéresser à la géométrie euclidienne de $\mathbb{C}$ pour la comprendre mieux et nous familiariser avec les concepts de *courbe paramétrée*, *longueur* et *géodésique*.

Dans la suite de ce texte, a et b sont toujours deux réels pour lesquels $a \leqslant b$.

2 Propriétés métriques du plan euclidien $\mathbb{C}$

2.1 Longueur d'une courbe paramétrée et géodésiques

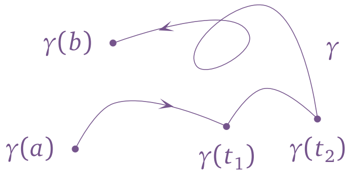
Une définition très générale des courbes paramétrées a été donnée au paragraphe précédent, qui n'exigeait que la continuité, mais nous nous intéresserons plus concrètement à des courbes paramétrées un peu plus que continues.

Définition **(Courbe paramétrée de $\mathbb{C}$)** Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que γ est une *courbe paramétrée de $\mathbb{C}$ sur $[a,b]$* s'il existe des réels $t_0, \ldots, t_n$ avec $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ pour lesquels pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[t_i, t_{i+1}]$. La famille $(t_0, \ldots, t_n)$ est alors appelée une *subdivision adaptée de γ*.

En particulier, γ est alors continue sur $[a,b]$ tout entier, y compris en les points $t_0, \ldots, t_n$.

Dans la suite de ce texte, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sera notée γ_i sans plus de précision.

Pourquoi ne pas demander plus simplement à γ d'être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ tout entier ? Simplement pour que son graphe puisse contenir des « angles », nous en aurons besoin plus tard pour des raisons techniques.

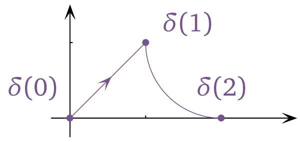


Exemple La courbe paramétrée $t \longmapsto e^{it}$ de $\mathbb{C}$ sur $[0, 2\pi]$ a pour image le cercle trigonométrique.

Exemple Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, la courbe paramétrée $t \longmapsto (1-t)u + tv$ de $\mathbb{C}$ sur $[0,1]$ a pour image le segment d'origine u et d'extrémité v.

Exemple Pour tout $t \in [0,2]$, on pose $\delta(t) = \begin{cases} (1+i)t & \text{si } t \in [0,1] \\ 2 + i + i e^{\frac{i\pi t}{2}} & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$

La fonction δ est une courbe paramétrée de $\mathbb{C}$ sur $[0,2]$.



Donnons-nous à présent une courbe paramétrée γ de classe $\mathscr{C}^1$ et intéressons-nous à la portion de courbe que constitue γ entre deux points de paramètres t et $t + \mathrm{d}t$ avec $\mathrm{d}t$ tout petit. Parce que $\mathrm{d}t$ est petit, cette portion de courbe peut être vue en première approximation comme un segment infinitésimal de longueur $d\big(\gamma(t), \gamma(t+\mathrm{d}t)\big) = \big|\gamma(t+\mathrm{d}t) - \gamma(t)\big|$. Or par définition du nombre dérivé : $\dfrac{\gamma(t+\mathrm{d}t) - \gamma(t)}{\mathrm{d}t} \approx \gamma'(t)$, donc $d\big(\gamma(t), \gamma(t+\mathrm{d}t)\big) \approx \big|\gamma'(t)\ \mathrm{d}t\big|$. En additionnant ces longueurs infinitésimales à mesure que t décrit $[a,b]$, on définit un réel positif dont la signification intuitive est celle d'une longueur, la longueur totale de γ sur $[a,b]$: $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \big|\gamma'(t)\big|\ \mathrm{d}t$.

Définition-théorème **(Longueur d'une courbe paramétrée de $\mathbb{C}$)** Soit γ une courbe paramétrée de $\mathbb{C}$ sur $[a,b]$ de subdivision adaptée $(t_0, \ldots, t_n)$. Le réel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big|\gamma_i'(t)\big|\ \mathrm{d}t$ ne dépend pas de la subdivision $(t_0, \ldots, t_n)$ choisie pour le calculer. On l'appelle la *longueur de γ* et on la note $L(\gamma)$.

Si γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ tout entier, cette définition s'écrit plus simplement : $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \big|\gamma'(t)\big|\ \mathrm{d}t$.

Démonstration Nous admettrons l'indépendance de la longueur vis-à-vis de la subdivision pour gagner du temps.

Les trois exemples qui suivent sont rassurants, les longueurs calculées coïncident heureusement avec celles que l'intuition nous dicte.

Exemple La courbe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$ a pour longueur $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \big|\gamma'(t)\big|\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \big|i e^{it}\big|\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$.

Exemple Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, la courbe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (1-t)u + tv$ sur $[0,1]$ a pour longueur :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \big|\gamma'(t)\big|\ \mathrm{d}t = \int_0^1 |v-u|\ \mathrm{d}t = |v-u| = d(u,v).$$

Exemple La courbe δ définie plus haut a pour longueur $L(\delta)=\int_0^1 |1+\mathrm{i}|\,\mathrm{d}t+\int_1^2\left|\mathrm{i}\times\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi t}{2}}\right|\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$.

Théorème (Propriétés de la longueur d'une courbe paramétrée de $\mathbb{C}$) Soit γ une courbe paramétrée de $\mathbb{C}$ sur $[a,b]$.

(i) **Positivité :** $L(\gamma)\geqslant 0$.

(ii) **Additivité :** Pour tout $c\in[a,b]$: $L(\gamma)=L\big(\gamma|_{[a,c]}\big)+L\big(\gamma|_{[c,b]}\big)$.

(iii) **Séparation :** Si $L(\gamma)=0$, l'image de γ est un singleton.

Démonstration Donnons-nous une subdivision adaptée $(t_0,\ldots,t_n)$ de γ.

(ii) Parce qu'on peut toujours raffiner une subdivision adaptée en lui ajoutant des points, on peut supposer que $c=t_k$ pour un certain $k\in[\![0,n]\!]$. Dans ces conditions, $(t_0,\ldots,t_k)$ est une subdivision adaptée de $\gamma|_{[a,c]}$ et $(t_k,\ldots,t_n)$ une subdivision adaptée à $\gamma|_{[c,b]}$ et de plus :

$$L(\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\gamma_i'(t)\big|\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\gamma_i'(t)\big|\,\mathrm{d}t+\sum_{i=k}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\gamma_i'(t)\big|\,\mathrm{d}t=L\big(\gamma|_{[a,c]}\big)+L\big(\gamma|_{[c,b]}\big).$$

(iii) Si $L(\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\gamma_i'(t)\big|\,\mathrm{d}t=0$, alors $\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big|\gamma_i'(t)\big|\,\mathrm{d}t=0$ pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$ par positivité des termes sommés, or la fonction $|\gamma_i'|$ est continue et positive sur $[t_i,t_{i+1}]$, donc identiquement nulle. Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la fonction γ_i est ainsi constante sur $[t_i,t_{i+1}]$, donc γ l'est sur $[a,b]$ tout entier, autrement dit son image est un singleton.

Le résultat suivant est intéressant en soi mais ne figure ici qu'à titre de lemme.

Théorème (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire intégrale) Soit $f\in\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. L'inégalité triangulaire $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est une égalité si et seulement si la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ pour un certain $\theta\in\mathbb{R}$.

Il est équivalent de dire que f est d'argument constant si on convient d'accorder à 0 tout réel pour argument.

Démonstration

- Si f est d'argument constant θ :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\right|=\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Au passage : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$, donc θ est un argument de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Réciproquement, faisons l'hypothèse que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$ et notons θ un argument de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, puis g la fonction $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f$. Aussitôt : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$, donc :

$$\int_a^b\Big(\big|g(t)\big|-\mathrm{Re}\big(g(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(t)\big|\,\mathrm{d}t-\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t-\mathrm{Re}\left(\int_a^b\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\right)=0.$$

Continue, positive et d'intégrale nulle d'après le calcul précédent, la fonction $|g|-\mathrm{Re}(g)$ est identiquement nulle sur $[a,b]$, autrement dit $|g|=\mathrm{Re}(g)$, et cela prouve que g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, i.e. que f est d'argument constant θ.

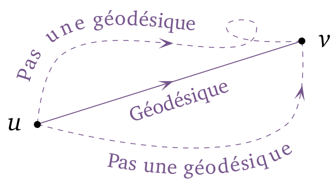
La définition de la longueur d'une courbe paramétrée a été motivée plus haut par des considérations peu rigoureuses sur la notion de distance. Le théorème suivant conforte notre choix en montrant que toute distance peut être calculée à partir de longueurs.

Théorème (Caractérisation de la distance sur $\mathbb{C}$ par la longueur et géodésiques de $\mathbb{C}$) Soient $u,v\in\mathbb{C}$.

(i) On note $\mathscr{C}_{u,v}$ l'ensemble des courbes paramétrées de $\mathbb{C}$ d'origine u et d'extrémité v. Alors $d(u,v)=\inf\limits_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}} L(\gamma)$.

(ii) Cette borne inférieure est en réalité un minimum. Les courbes paramétrées γ qui le réalisent sont appelées les *géodésiques de $\mathbb{C}$ d'origine u et d'extrémité v* et ce sont précisément toutes les courbes paramétrées de $\mathbb{C}$ qui parcourent sans retour en arrière le segment d'origine u et d'extrémité v.

Sans surprise, la distance entre deux points est aussi la plus petite longueur possible d'une courbe paramétrée entre ces points et le plus court chemin possible entre deux points n'est autre que le segment les joignant l'un à l'autre — à condition qu'on ne parcoure celui-ci qu'une seule fois sans retour en arrière.



Démonstration Nous travaillerons pour simplifier seulement avec des courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^1$, cela nous évitera d'utiliser des subdivisions adaptées $(t_0,\ldots,t_n)$.

(i) Pour toute courbe paramétrée $\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}$ sur $[a,b]$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$L(\gamma)=\int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t \geqslant \left|\int_a^b \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\big[\gamma(t)\big]_{t=a}^{t=b}\right| = \left|\gamma(b)-\gamma(a)\right| = |v-u| = d(u,v),$$

donc l'ensemble $\left\{L(\gamma)\ \mid\ \gamma\in\mathscr{C}_{u,v}\right\}$ est minoré par $d(u,v)$. Cela dit, nous avons vu dans un exemple précédent qu'il contient $d(u,v)$, donc $d(u,v)=\min\limits_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}} L(\gamma)=\inf\limits_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}} L(\gamma)$.

(ii) À quelle condition nécessaire et suffisante sur γ est-il vrai que $L(\gamma)=d(u,v)$? D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} L(\gamma)=d(u,v) &\iff \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t=\left|\int_a^b \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \iff \gamma' \text{ est d'argument constant}\\ &\iff \text{Pour un certain } \theta\in\mathbb{R}, \text{ la fonction } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\gamma' \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+\\ &\iff \text{Pour un certain } \theta\in\mathbb{R}, \text{ la fonction } t\overset{\delta}{\longmapsto}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big(\gamma(t)-\gamma(a)\big) \text{ est réelle et croissante.}\end{aligned}$$

La relation $\gamma(t)=\gamma(a)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\delta(t)$ pour tout $t\in[a,b]$ indique enfin que γ décrit « en croissant » le segment d'origine $\gamma(a)=u$ et d'extrémité $\gamma(b)=v$.

2.2 Isométries

Exemple Pour tous $a\in\mathbb{U}$ et $b\in\mathbb{C}$, la fonction $z\overset{f}{\longmapsto}az+b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$ car pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:

$$\left|f(u)-f(v)\right|=\left|(au+b)-(av+b)\right|=|a|\,.\,|u-v|\overset{a\in\mathbb{U}}{=}|u-v|.$$

La fonction $z\longmapsto a\overline{z}+b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$ pour une raison analogue. Rappelons au passage que $z\longmapsto az+b$ est soit la translation de vecteur b si $a=1$, soit la rotation de centre $\dfrac{b}{1-a}$ — point fixe — et d'angle de mesure $\arg(a)$ si $a\neq 1$. On peut montrer que la fonction $z\longmapsto a\overline{z}+b$ est une symétrie axiale.

Le théorème suivant énonce que les isométries de $\mathbb{C}$ sont exactement celles qu'on vient d'exhiber, il n'en existe pas d'autres.

Théorème (Caractérisation des isométries de $\mathbb{C}$) Les isométries de $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions $z\longmapsto az+b$ et $z\longmapsto a\overline{z}+b$, (a,b) décrivant $\mathbb{U}\times\mathbb{C}$.

Démonstration Soit f une isométrie de $\mathbb{C}$. Si f est de la forme $z\longmapsto az+b$ ou $z\longmapsto a\overline{z}+b$, $z\longmapsto \dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$ est l'une des fonctions $z\longmapsto z$ et $z\longmapsto\overline{z}$. Laissons-nous maintenant porter par cette remarque.

- Comme f est une isométrie : $\left|f(1)-f(0)\right|=|1-0|=1>0$, donc $f(0)\neq f(1)$ et nous pouvons poser $g(z)=\dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:

$$\left|g(u)-g(v)\right|=\left|\frac{f(u)-f(0)}{f(1)-f(0)}-\frac{f(v)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right|=\frac{\left|f(u)-f(v)\right|}{\left|f(1)-f(0)\right|}=\frac{|u-v|}{|1-0|}=|u-v|,$$

donc g aussi est une isométrie. Remarquons par ailleurs que $g(0)=0$ et $g(1)=1$. Dans ce qui suit, c'est g que nous allons déterminer et nous en déduirons f.

- Montrons que $g(z)=z$ ou $g(z)=\overline{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Fixons $z\in\mathbb{C}$ et introduisons les formes algébriques de z et $g(z)$: $\quad z=x+\mathrm{i}y \quad$ et $\quad g(z)=x'+\mathrm{i}y' \quad$ avec $x,x',y,y'\in\mathbb{R}$. Aussitôt :
$$\big|g(z)\big|=\big|g(z)-g(0)\big|=|z-0|=|z| \qquad \text{et} \qquad \big|g(z)-1\big|=\big|g(z)-g(1)\big|=|z-1|,$$
d'où le système $\begin{cases} x'^2+y'^2=x^2+y^2 \\ (x'-1)^2+y'^2=(x-1)^2+y^2, \end{cases}$ et ainsi $x'=x$ et $y'=\pm y$ après soustraction. Comme annoncé, $g(z)$ vaut $x'+\mathrm{i}y'=x+\mathrm{i}y=z$ ou $x'+\mathrm{i}y'=x-\mathrm{i}y=\overline{z}$.

- Nous venons de montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $g(z)$ vaut z ou $\overline{z}$, mais il se pourrait bien qu'on ait $g(z)=z$ pour certains z et $g(z)=\overline{z}$ pour d'autres. Nous allons montrer qu'en réalité, on a soit TOUJOURS $g(z)=z$, soit TOUJOURS $g(z)=\overline{z}$ — résultat beaucoup plus fort. Ce qui est au moins sûr, c'est que $g(\mathrm{i})$ vaut soit i, soit $\overline{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.
  - Supposons d'abord que $g(\mathrm{i})=\mathrm{i}$ et montrons que $g(z)=z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $g(z)=\overline{z}$, alors $|\overline{z}-\mathrm{i}|=\big|g(z)-g(\mathrm{i})\big|=|z-\mathrm{i}|$, donc $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$. Équidistant des points i et $-\mathrm{i}$, z appartient ainsi à leur médiatrice $\mathbb{R}$, et donc $g(z)=\overline{z}=z$.
  - On montre de même que si $g(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, alors $g(z)=\overline{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

- Posons pour conclure $a=f(1)-f(0)\neq 0$ et $b=f(0)$. Par définition de g, $g(z)=\dfrac{f(z)-b}{a}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, or g est l'une des fonctions $z\longmapsto z$ ou $z\longmapsto\overline{z}$, donc f est soit la fonction $z\longmapsto az+b$, soit la fonction $z\longmapsto a\overline{z}+b$. ■

2.3 Conclusion

Théorème Le plan euclidien $\mathbb{C}$ est une surface géodésique 2-homogène.

Démonstration

- Pour commencer, $\mathbb{C}$ est un voisinage de chacun de ses points, et bien sûr $\mathbb{C}$ est homéomorphe à lui-même, donc $\mathbb{C}$ est une surface.
- Ensuite, $\mathbb{C}$ est géodésique car pour tous $u,v\in\mathbb{C}$ distincts, la courbe paramétrée $t\overset{f}{\longmapsto} u+\dfrac{v-u}{|v-u|}\,t$ est une isométrie sur $\big[0,|v-u|\big]$ d'origine u et d'extrémité v. En effet, pour tous $s,t\in\big[0,|v-u|\big]$:
$$\big|f(s)-f(t)\big|=\left|\frac{v-u}{|v-u|}\,s-\frac{v-u}{|v-u|}\,t\right|=|s-t|.$$
- Pour finir, $\mathbb{C}$ est 2-homogène car pour tous $u,v\in\mathbb{C}$ et $u',v'\in\mathbb{C}$ pour lesquels $|u-v|=|u'-v'|>0$, la fonction $z\overset{g}{\longmapsto}\dfrac{v'-u'}{v-u}\,(z-u)+u'$ est une isométrie de $\mathbb{C}$ pour laquelle $g(u)=u'$ et $g(v)=v'$. ■

3 Géométrie hyperbolique du demi-plan de Poincaré

Définition (Demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$)
On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathscr{H}=\Big\{z\in\mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z)>0\Big\}$.

Nous allons munir $\mathscr{H}$ d'une structure géométrique plane non euclidienne dite *hyperbolique* et en étudier quelques aspects.

3.1 Longueur d'une courbe paramétrée

Définition (Courbe paramétrée de $\mathscr{H}$) Soit $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathscr{H}$ une fonction. On dit que γ est une *courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$* s'il existe des réels $t_0,\ldots,t_n$ avec $a=t_0<\ldots<t_n=b$ pour lesquels pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[t_i,t_{i+1}]$. L'ensemble $(t_0,\ldots,t_n)$ est alors appelé une *subdivision adaptée de γ*.

En particulier, γ est alors continue sur $[a,b]$ tout entier, y compris en les points $t_0,\ldots,t_n$.

Dans la suite de ce texte, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la restriction $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ sera généralement notée γ_i sans plus de précision.

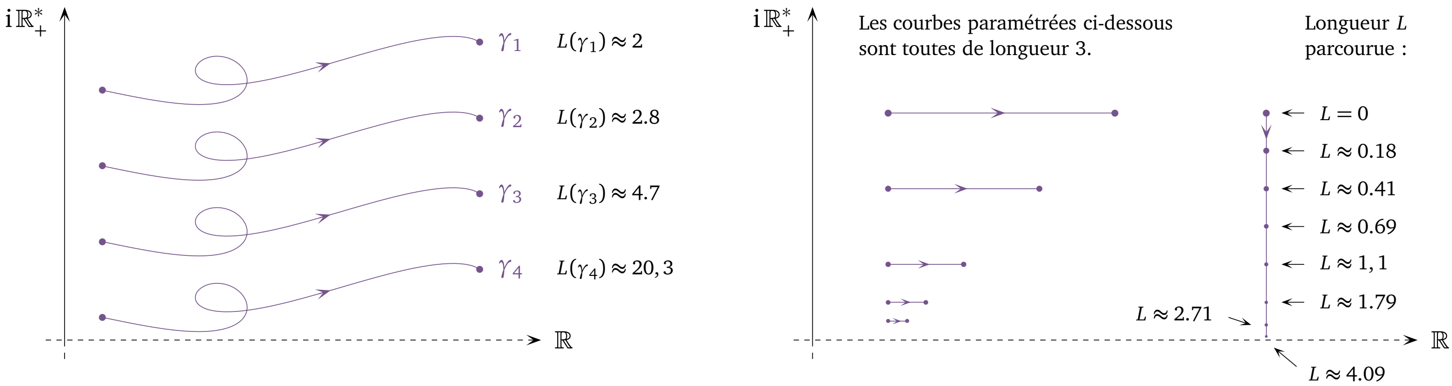
Au point où nous en sommes, $\mathscr{H}$ est une vulgaire partie de $\mathbb{C}$ et les notions de continuité et de classe $\mathscr{C}^1$ évoquées sont relatives aux distances usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Définition-théorème (Longueur d'une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$) Soit γ une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$ de subdivision adaptée $(t_0,\ldots,t_n)$. Le réel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{|\gamma_i'(t)|}{\mathrm{Im}\big(\gamma_i(t)\big)}\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la subdivision $(t_0,\ldots,t_n)$ choisie pour le calculer. On l'appelle la *longueur de* γ et on le note $L(\gamma)$.

Si γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ tout entier, cette définition s'écrit plus simplement : $\displaystyle L(\gamma)=\int_a^b\frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t.$

Cette définition de la longueur est tout à fait arbitraire de notre point de vue car notre point de vue est celui de l'espace euclidien $\mathbb{C}$, dont la distance $(x,y)\longmapsto|x-y|$ est la seule qui nous paraît naturelle. Pour les habitants de $\mathscr{H}$ auxquels nous sommes en train de donner vie, c'est la notion de longueur que nous venons d'introduire qui est naturelle, elle constitue la loi métrique de leur petit monde et c'est notre distance à nous qui leur paraît extravagante.

Dans la définition $\displaystyle L(\gamma)=\int_a^b\frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t$, plus γ est proche de l'axe réel, plus le dénominateur $\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)$ est proche de 0 et plus $L(\gamma)$ est grande. Au contraire, plus γ est éloignée de l'axe réel, plus le dénominateur $\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)$ est grand et plus $L(\gamma)$ est proche de 0.



Exemple Soient $u,v\in\mathscr{H}$ pour lesquels $\mathrm{Re}(u)=\mathrm{Re}(v)$. Notons γ la courbe $t\longmapsto(1-t)u+tv=u+t(v-u)$ de $\mathscr{H}$ sur $[0,1]$. Pour tout $t\in[0,1]$: $\gamma'(t)=v-u=\mathrm{Im}(v-u)$, donc $\displaystyle L(\gamma)=\int_0^1\frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{|\mathrm{Im}(v-u)|}{\mathrm{Im}(u)+t\,\mathrm{Im}(v-u)}\,\mathrm{d}t.$

— Si $\mathrm{Im}(u)\leqslant\mathrm{Im}(v)$, alors $\displaystyle L(\gamma)=\int_0^1\frac{\mathrm{Im}(v-u)}{\mathrm{Im}(u)+t\,\mathrm{Im}(v-u)}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln\big(\mathrm{Im}(u)+t\,\mathrm{Im}(v-u)\big)\Big]_{t=0}^{t=1}=\ln\frac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)}.$

— Si $\mathrm{Im}(u)>\mathrm{Im}(v)$, alors $\displaystyle L(\gamma)=-\int_0^1\frac{\mathrm{Im}(v-u)}{\mathrm{Im}(u)+t\,\mathrm{Im}(v-u)}\,\mathrm{d}t=-\Big[\ln\big(\mathrm{Im}(u)+t\,\mathrm{Im}(v-u)\big)\Big]_{t=0}^{t=1}=\ln\frac{\mathrm{Im}(u)}{\mathrm{Im}(v)}.$

Dans tous les cas $\displaystyle L(\gamma)=\left|\ln\frac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)}\right|$. En particulier, si v s'approche de l'axe réel, autrement dit si $\mathrm{Im}(v)$ tend vers 0, $L(\gamma)$ tend vers $+\infty$ comme la figure de droite ci-dessus le suggérait.

Théorème (Propriétés de la longueur d'une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$) Soit γ une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$.

(i) **Positivité :** $L(\gamma)\geqslant 0$.

(ii) **Additivité :** Pour tout $c\in[a,b]$: $L(\gamma)=L\big(\gamma|_{[a,c]}\big)+L\big(\gamma|_{[c,b]}\big)$.

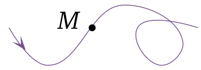
(iii) **Séparation :** Si $L(\gamma)=0$, l'image de γ est un singleton.

(iv) **Changement de paramétrage :** Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ bijective d'un segment $[c,d]$ sur son image $[a,b]$. La fonction $\gamma\circ\varphi$ est alors une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[c,d]$ de même image que γ et de plus : $L(\gamma\circ\varphi)=L(\gamma)$.

(v) **Une minoration de la longueur :** Si on note u l'origine de γ et v son extrémité : $\displaystyle L(\gamma)\geqslant\left|\ln\left|\frac{v}{u}\right|+\mathrm{i}\arg\left(\frac{v}{u}\right)\right|.$

Que représente géométriquement $\gamma\circ\varphi$ dans l'assertion (iv) ? Alors que γ décrit l'ensemble des points $\gamma(t)$, t décrivant $[a,b]$, $\gamma\circ\varphi$ décrit quant à elle l'ensemble des points $\gamma\big(\varphi(s)\big)$, s décrivant $[c,d]$, mais donc, φ étant bijective de $[c,d]$ sur $[a,b]$, γ et $\gamma\circ\varphi$ passent en réalité physiquement par les mêmes points.

Les variables s et $t=\varphi(s)$ sont comme deux variables temporelles associées chacune à un mobile, respectivement S et T. Si nous notons M le point $M=\gamma(t)=\gamma\circ\varphi(s)$, le mobile S est en M à l'instant s pendant que le mobile T y est à l'instant t. Les deux mobiles parcourent le même circuit mais simplement dans des temporalités séparées, a priori avec des vitesses différentes.



M est à la fois un $\gamma(t)$ et un $\gamma\big(\varphi(s)\big)$.

Démonstration (Assertions (i), (ii) et (iii)) Même preuve que sur $\mathbb{C}$!

Démonstration (Assertion (iv)) Toute fonction continue et bijective est strictement monotone. Nous supposerons φ croissante, i.e. φ' positive — preuve analogue si φ est décroissante. Donnons-nous maintenant une subdivision adaptée $(t_0,\ldots,t_n)$ de γ et posons $t'_i=\varphi^{-1}(t_i)$ pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$. La fonction $\gamma\circ\varphi$ est alors une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[c,d]$ de subdivision adaptée $(t'_0,\ldots,t'_{n-1})$ et :

$$\begin{aligned}L(\gamma\circ\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t'_i}^{t'_{i+1}}\frac{\left|(\gamma\circ\varphi)'(s)\right|}{\mathrm{Im}\big(\gamma\circ\varphi(s)\big)}\,\mathrm{d}s&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t'_i}^{t'_{i+1}}\frac{\left|\gamma'\big(\varphi(s)\big)\right|}{\mathrm{Im}\Big(\gamma\big(\varphi(s)\big)\Big)}\,\left|\varphi'(s)\right|\,\mathrm{d}s\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t'_i}^{t'_{i+1}}\frac{\left|\gamma'\big(\varphi(s)\big)\right|}{\mathrm{Im}\Big(\gamma\big(\varphi(s)\big)\Big)}\,\varphi'(s)\,\mathrm{d}s\overset{t=\varphi(s)}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\left|\gamma'(t)\right|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t=L(\gamma).\end{aligned}$$

Démonstration (Assertion (v)) Donnons-nous pour commencer une subdivision adaptée $(t_0,\ldots,t_n)$ de γ et posons $x=\mathrm{Re}(\gamma)$, $y=\mathrm{Im}(\gamma)$, $r=|\gamma|$ et $\theta=\arg(\gamma)$.

- Tout d'abord : $\dfrac{x}{y}=\dfrac{r\cos\theta}{r\sin\theta}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$. Or γ est à valeurs dans $\mathscr{H}$, donc θ dans $]0,\pi[$, donc $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\dfrac{\pi}{2}-\theta=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y}$, i.e. $\arg(\gamma)=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y}$.
- Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, dérivons maintenant la fonction $\ln|\gamma_i|+\mathrm{i}\arg(\gamma_i)$ sur $[t_i,t_{i+1}]$ dont nous savons qu'elle constitue UN logarithme de γ_i.

$$\begin{aligned}\big(\ln|\gamma_i|+\mathrm{i}\arg(\gamma_i)\big)'&=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y}\right)'=\frac{1}{2}\times\frac{2xx'+2yy'}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\,\frac{\dfrac{yx'-xy'}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\\&=\frac{(xx'+yy')-\mathrm{i}(yx'-xy')}{x^2+y^2}=\frac{(x-\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}=\frac{\gamma'_i}{\gamma_i}.\end{aligned}$$

- Finalement, sachant que $\mathrm{Im}\,\gamma\leqslant|\gamma|$:

$$\begin{aligned}L(\gamma)&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\left|\gamma'_i(t)\right|}{\mathrm{Im}\big(\gamma_i(t)\big)}\,\mathrm{d}t\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\frac{\gamma'_i(t)}{\gamma_i(t)}\right|\mathrm{d}t\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\gamma'_i(t)}{\gamma_i(t)}\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\gamma'_i(t)}{\gamma_i(t)}\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\ln|\gamma_i|+\mathrm{i}\arg(\gamma_i)\Big]_{t_i}^{t_{i+1}}\right|=\left|\Big[\ln|\gamma|+\mathrm{i}\arg(\gamma)\Big]_a^b\right|=\left|\ln\left|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right|+\mathrm{i}\arg\left(\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right)\right|=\left|\ln\left|\frac{v}{u}\right|+\mathrm{i}\arg\left(\frac{v}{u}\right)\right|.\end{aligned}$$

3.2 Distance

Nous disposions dans $\mathbb{C}$ d'une notion de distance claire, nous avons défini une notion de longueur raisonnable et nous avons vérifié que toute distance pouvait être calculée à partir de longueurs. Nous allons inverser cette démarche dans $\mathscr{H}$ et définir une distance sur $\mathscr{H}$ à partir de la notion de longueur précédemment introduite.

Définition-théorème (Distance sur $\mathscr{H}$) Soient $u,v\in\mathscr{H}$. On note $\mathscr{C}_{u,v}$ l'ensemble des courbes paramétrées de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v et on pose $d(u,v)=\inf\limits_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}}L(\gamma)$. La fonction $d:\mathscr{H}\times\mathscr{H}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une distance sur $\mathscr{H}$.

Démonstration (Bonne définition et positivité) Pour tous $u,v\in\mathscr{H}$, l'ensemble $\Big\{L(\gamma)\ \big|\ \ \gamma\in\mathscr{C}_{u,v}\Big\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, donc possède une borne inférieure d'après la propriété de la borne inférieure. En particulier $d(u,v)\geqslant 0$.

Démonstration (Symétrie) Soient $u,v\in\mathbb{C}$. Pour toute courbe paramétrée $\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}$ sur $[a,b]$, $t\overset{\delta}{\longmapsto}\gamma(-t)$ est une courbe paramétrée de $\mathscr{C}_{v,u}$ définie sur $[-b,-a]$ et $L(\delta)=L(\gamma)$ par changement de paramétrage. Ainsi,

$d(v,u) \leqslant L(\gamma)$ par définition de $d(v,u)$ comme borne inférieure, puis $d(v,u) \leqslant d(u,v)$ par définition de $d(u,v)$ comme borne inférieure. L'égalité souhaitée en découle par symétrie des rôles de u et v.

Démonstration **(Séparation)** Soient $u,v \in \mathbb{C}$. On suppose que $d(u,v)=0$. Nous avons vu que pour toute courbe paramétrée $\gamma \in \mathscr{C}_{u,v}$: $L(\gamma) \geqslant \left|\ln\left|\frac{v}{u}\right| + \mathrm{i}\arg\left(\frac{v}{u}\right)\right|$. Ainsi $\left|\ln\left|\frac{v}{u}\right| + \mathrm{i}\arg\left(\frac{v}{u}\right)\right| = 0$ par définition de $d(u,v)$ comme borne inférieure, donc $\ln\left|\frac{v}{u}\right| = \arg\left(\frac{v}{u}\right) = 0$, donc $\frac{v}{u} = \left|\frac{v}{u}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg\left(\frac{v}{u}\right)} = 1$, i.e. $u=v$.

Démonstration **(Inégalité triangulaire)** Soient $u,v,w \in \mathscr{H}$, $\gamma \in \mathscr{C}_{u,v}$ définie sur $[a,b]$ et $\delta \in \mathscr{C}_{v,w}$ définie sur $[c,d]$. Posons pour tout $t \in [-1,1]$: $\varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma\big(b+t(b-a)\big) & \text{si } t \in [-1,0] \\ \delta\big(c+t(d-c)\big) & \text{si } t \in]0,1]. \end{cases}$ Par changement de paramétrage, $\varepsilon|_{[-1,0]}$ est une courbe paramétrée de $\mathscr{C}_{u,v}$ définie sur $[-1,0]$ et $L\big(\varepsilon|_{[-1,0]}\big) = L(\gamma)$. De même, $\varepsilon|_{[0,1]}$ est une courbe paramétrée de $\mathscr{C}_{v,w}$ définie sur $[0,1]$ et $L\big(\varepsilon|_{[0,1]}\big) = L(\delta)$. Enfin, ε elle-même est une courbe paramétrée de $\mathscr{C}_{u,w}$ définie sur $[-1,1]$. À présent, $d(u,w) \leqslant L(\varepsilon) = L\big(\varepsilon|_{[-1,0]}\big) + L\big(\varepsilon|_{[0,1]}\big) = L(\gamma)+L(\delta)$ par définition de $d(u,w)$ comme borne inférieure, donc $d(u,w)-L(\delta) \leqslant L(\gamma)$, puis $d(u,w)-L(\delta) \leqslant d(u,v)$ par définition de $d(u,v)$ comme borne inférieure. Finalement, $d(u,w)-d(u,v) \leqslant L(\delta)$ donc $d(u,w)-d(u,v) \leqslant d(v,w)$ par définition de $d(v,w)$ comme borne inférieure et c'est fini.

3.3 Un premier exemple de géodésiques

Définition **(Géodésiques de $\mathscr{H}$)** Soient $u,v \in \mathscr{H}$. On appelle *géodésique de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v* toute courbe paramétrée $\gamma \in \mathscr{C}_{u,v}$ pour laquelle $L(\gamma) = d(u,v)$.

Rien ne garantit a priori qu'il existe des géodésiques dans $\mathscr{H}$, i.e. que la borne inférieure qui définit $d(u,v)$ est un minimum.

Théorème **(Géodésiques imaginaires pures de $\mathscr{H}$)** Soient $\alpha,\beta > 0$. Les géodésiques de $\mathscr{H}$ d'origine $\mathrm{i}\alpha$ et d'extrémité $\mathrm{i}\beta$ sont toutes les courbes paramétrées de $\mathscr{H}$ qui parcourent sans retour en arrière le segment vertical entre ces points.

Tout ça pour ça ! Quand l'origine et l'extrémité sont choisies dans $\mathrm{i}\,\mathbb{R}_+^*$, les géodésiques de $\mathscr{H}$ sont celles de $\mathbb{C}$. Nous verrons plus tard que les géodésiques de $\mathscr{H}$ sont en général plus exotiques.

Démonstration

- Pour toute courbe paramétrée $\gamma \in \mathscr{C}_{\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta}$: $L(\gamma) \geqslant \left|\ln\left|\frac{\mathrm{i}\beta}{\mathrm{i}\alpha}\right| + \mathrm{i}\arg\left(\frac{\mathrm{i}\beta}{\mathrm{i}\alpha}\right)\right| = \left|\ln\frac{\beta}{\alpha}\right|$. Nous avons vu cela dit que la courbe paramétrée $t \longmapsto (1-t)\mathrm{i}\alpha + t\mathrm{i}\beta$ de $\mathscr{H}$ sur $[0,1]$ a justement pour longueur $\left|\ln\frac{\beta}{\alpha}\right|$, donc par définition de $d(\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta)$: $d(\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta) = \left|\ln\frac{\beta}{\alpha}\right|$.
- À présent, soit $\gamma \in \mathscr{C}_{\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta}$ définie sur $[a,b]$ de partie imaginaire y. Pour éviter les subdivisions adaptées, nous supposerons f de classe $\mathscr{C}^1$. Dire que γ est une géodésique de $\mathscr{H}$ d'origine $\mathrm{i}\alpha$ et d'extrémité $\mathrm{i}\beta$, c'est dire que l'inégalité $L(\gamma) \geqslant d(\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta)$ est en fait une égalité. Rappelons la preuve de cette inégalité :

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma(t))}\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{Im}(\gamma)\leqslant|\gamma|}{\geqslant} \int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t \geqslant \left|\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\Big[\ln|\gamma| + \mathrm{i}\arg(\gamma)\Big]_a^b\right| = \left|\ln\frac{\beta}{\alpha}\right| = d(\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} L(\gamma) = d(\mathrm{i}\alpha,\mathrm{i}\beta) \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma(t))}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t = \left|\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_a^b \underbrace{\left(\frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma(t))} - \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right|\right)}_{\text{Continue positive}} \mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t = \left|\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(\gamma) = |\gamma| \text{ sur } [a,b] \quad \text{et} \quad \int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t = \left|\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$

On cache ici quelques détails techniques.

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \gamma = \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad \int_a^b \left|\frac{y'(t)}{y(t)}\right| \mathrm{d}t = \left|\int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\iff \quad \gamma = \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad \frac{y'}{y} \text{ a un signe constant sur } [a,b] \\
&\overset{y>0}{\iff} \quad \gamma = \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad y' \text{ a un signe constant sur } [a,b] \\
&\iff \quad \gamma = \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad y \text{ est monotone sur } [a,b].
\end{aligned}$$

C'est exactement le résultat promis.

Il en aura fallu des calculs pour ce premier exemple de géodésiques. La détermination des autres géodésiques de $\mathscr{H}$ est plus compliquée et nous allons les déterminer par déformation en jouant avec la 2-homogénéité. L'idée est simple. Si $h : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ est une fonction qui préserve les longueurs de courbes paramétrées et si γ est une géodésique d'origine u et d'extrémité v, on peut s'attendre à ce que $h \circ \gamma$ soit une géodésique d'origine $h(u)$ et d'extrémité $h(v)$. Cette remarque nous permettra peut-être d'atteindre, à partir des seules géodésiques imaginaires pures, la totalité des géodésiques de $\mathscr{H}$.

3.4 Homographies

Exemple Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On note h la fonction $z \longmapsto \alpha z + \beta$. Pour toute courbe paramétrée γ de $\mathscr{H}$, $h \circ \gamma$ est aussi une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ et $L(h \circ \gamma) = L(\gamma)$.

Démonstration Pour commencer, h est à valeurs dans $\mathscr{H}$ car pour tout $z \in \mathscr{H}$:

$$\mathrm{Im}\big(h(z)\big) = \mathrm{Im}(\alpha z + \beta) = \alpha\,\mathrm{Im}(z) > 0 \qquad \text{puisque } \alpha > 0 \text{ et } z \in \mathscr{H}.$$

Ensuite, pour toute courbe paramétrée γ de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$, $t \overset{h\circ\gamma}{\longmapsto} \alpha\gamma(t) + \beta$ est tout autant une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$ et :

$$L(h\circ\gamma) = \int_a^b \frac{\big|(\alpha\gamma+\beta)'(t)\big|}{\mathrm{Im}\big(\alpha\gamma(t)+\beta\big)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\alpha\big|\gamma'(t)\big|}{\alpha\,\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\big|\gamma'(t)\big|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t = L(\gamma).$$

Exemple On note h la fonction $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$. Pour toute courbe paramétrée γ de $\mathscr{H}$, $h \circ \gamma$ est aussi une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ et $L(h \circ \gamma) = L(\gamma)$.

Démonstration Pour commencer, h est à valeurs dans $\mathscr{H}$ car pour tout $z \in \mathscr{H}$:

$$\mathrm{Im}\big(h(z)\big) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} > 0 \qquad \text{puisque } z \in \mathscr{H}.$$

Ensuite, pour toute courbe paramétrée γ de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$, $t \overset{h\circ\gamma}{\longmapsto} -\dfrac{1}{\gamma(t)}$ est tout autant une courbe paramétrée de $\mathscr{H}$ sur $[a,b]$, et si nous posons $x = \mathrm{Re}(\gamma)$ et $y = \mathrm{Im}(\gamma)$:

$$\begin{aligned}
(h\circ\gamma)' &= -\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\right)' = -\left(\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right)' = -\frac{(x'-\mathrm{i}y')(x^2+y^2) - 2(x-\mathrm{i}y)(xx'+yy')}{(x^2+y^2)^2} \\
&= -\frac{(x'-\mathrm{i}y')(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) - 2(x-\mathrm{i}y)(xx'+yy')}{(x+\mathrm{i}y)^2(x-\mathrm{i}y)^2} = -\frac{(x'-\mathrm{i}y')(x+\mathrm{i}y) - 2(xx'+yy')}{(x+\mathrm{i}y)^2(x-\mathrm{i}y)} \\
&= \frac{(xx'+yy') + \mathrm{i}(xy'-yx')}{(x+\mathrm{i}y)^2(x-\mathrm{i}y)} = \frac{(x-\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')}{(x+\mathrm{i}y)^2(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x'+\mathrm{i}y'}{(x+\mathrm{i}y)^2} = \frac{\gamma'}{\gamma^2}.
\end{aligned}$$

Le résultat paraît évident, mais n'oubliez pas que nous ne savons pas dériver les fonctions d'une variable complexe, la relation $(h\circ\gamma)' = \gamma' \times h' \circ \gamma$ nous est donc interdite.

Finalement : $$L(h\circ\gamma) = \int_a^b \frac{\left|\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2}\right|}{\mathrm{Im}\left(-\dfrac{1}{\gamma(t)}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\left|\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2}\right|}{\dfrac{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}{\big|\gamma(t)\big|^2}}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\big|\gamma'(t)\big|}{\mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)}\,\mathrm{d}t = L(\gamma).$$

Définition-théorème **(Homographies de $\mathscr{H}$)** On appelle *homographie de $\mathscr{H}$* toute fonction $z \longmapsto \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ définie sur $\mathscr{H}$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ et $\alpha\delta-\beta\gamma>0$.

(i) Toute composée d'homographies de $\mathscr{H}$ est encore une homographie de $\mathscr{H}$.

(ii) Toute homographie de $\mathscr{H}$ est bijective de $\mathscr{H}$ sur lui-même et sa réciproque est encore une homographie de $\mathscr{H}$.

(iii) Toute homographie de $\mathscr{H}$ préserve les longueurs des courbes paramétrées de $\mathscr{H}$.

(iv) Toute homographie de $\mathscr{H}$ est une isométrie de $\mathscr{H}$.

(v) Soient $u,v\in\mathscr{H}$, γ une géodésique de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v et h une homographie de $\mathscr{H}$. La composée $h\circ\gamma$ est une géodésique de $\mathscr{H}$ d'origine $h(u)$ et d'extrémité $h(v)$.

L'assertion (v) confort nettement l'idée que les géodésiques de $\mathscr{H}$ peuvent peut-être être déterminées à partir de ses seules géodésiques imaginaires pures.

Démonstration L'assertion (i) n'est pas difficile à vérifier, mais il ne faut pas oublier de montrer que la condition $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ est bien transmise à la composée. Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ avec $\alpha\delta-\beta\gamma>0$. Notons h la fonction $z\longmapsto\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ sur $\mathscr{H}$.

(ii) La fonction h est à valeurs dans $\mathscr{H}$ car pour tout $z\in\mathscr{H}$, sachant que α, β, γ et δ sont des réels :

$$\mathrm{Im}\big(h(z)\big)=\mathrm{Im}\left(\frac{(\alpha z+\beta)(\gamma\overline{z}+\delta)}{|\gamma z+\delta|^2}\right)=\frac{\mathrm{Im}\big(\alpha\gamma\,|z|^2+\alpha\delta z+\beta\gamma\overline{z}+\beta\delta\big)}{|\gamma z+\delta|^2}=\frac{\mathrm{Im}(\alpha\delta z)+\mathrm{Im}\big(\beta\gamma\overline{z}\big)}{|\gamma z+\delta|^2}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\mathrm{Im}(z)}{|\gamma z+\delta|^2}>0.$$

Pour montrer que h est bijective de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$ de réciproque une homographie, remarquons simplement que la fonction $z\overset{h'}{\longmapsto}\dfrac{\delta z-\beta}{-\gamma z+\alpha}$ est aussi une homographie car $\delta\alpha-(-\beta)(-\gamma)=\alpha\delta-\beta\gamma>0$, et il n'est pas dur de vérifier qu'elle est réciproque de h.

(iii) Si $\gamma=0$, le résultat découle directement d'un exemple précédent.

Si $\gamma\neq0$, nous pouvons supposer que $\gamma=1$ quitte à diviser α, β, γ et δ par γ — ce qui n'affecte ni h, ni la condition $\alpha\delta-\beta\gamma>0$. Or pour tout $z\in\mathscr{H}$: $\quad h(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{z+\delta}=\alpha-\dfrac{\alpha\delta-\beta}{z+\delta}$, donc h est la composée des fonctions $z\longmapsto z+\delta$, $z\longmapsto-\dfrac{1}{z}$ et $z\longmapsto(\alpha\delta-\beta)z+\alpha$, lesquelles préservent les longueurs de courbes paramétrées de $\mathscr{H}$ d'après nos exemples précédents. A fortiori, h les préserve aussi.

(iv) et (v) Soient $u,v\in\mathscr{H}$. Les applications :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}_{u,v} & \longrightarrow & \mathscr{C}_{h(u),h(v)}\\ \gamma & \longmapsto & h\circ\gamma\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}_{h(u),h(v)} & \longrightarrow & \mathscr{C}_{u,v}\\ \gamma & \longmapsto & h^{-1}\circ\gamma\end{array}\right.$$

sont réciproques l'une de l'autre, donc bijectives, donc :

$$d\big(h(u),h(v)\big)=\inf_{\delta\in\mathscr{C}_{h(u),h(v)}}L(\delta)=\inf_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}}L(h\circ\gamma)=\inf_{\gamma\in\mathscr{C}_{u,v}}L(\gamma)=d(u,v).$$

Enfin, pour toute géodésique γ de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v : $\quad L(h\circ\gamma)=L(\gamma)=d(u,v)=d\big(h(u),h(v)\big)$, donc $h\circ\gamma$ est une géodésique de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v.

3.5 Géodésiques

Théorème **(2-homogénéité de $\mathscr{H}$)** $\mathscr{H}$ est 2-homogène.

Cette fois c'est sûr, les géodésiques de $\mathscr{H}$ sont à notre portée. Y a plus qu'à !

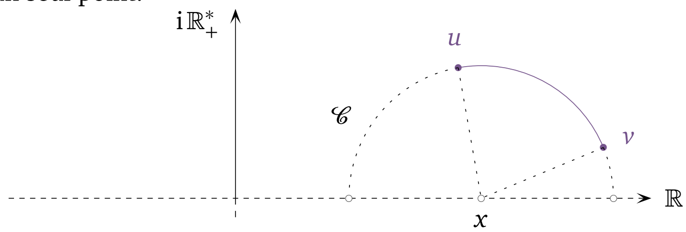
Démonstration Soient $\delta>0$ et $u,v,u',v'\in\mathscr{H}$ des points pour lesquels $d(u,v)=d(u',v')=\delta$. D'après nos calculs précédents : $\quad d\big(\mathrm{i},\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}\big)=\big|\ln\mathrm{e}^{\delta}\big|=\delta.\quad$ Si jamais nous parvenons à trouver une homographie h de $\mathscr{H}$ qui envoie u sur i et v sur $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}$, et de même une homographie h' qui envoie u' sur i et v' sur $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}$, la composée $h'^{-1}\circ h^{-1}$ sera encore une homographie — donc une isométrie — et enverra comme voulu u sur u' et v sur v'.

Les couples (u,v) et (u',v') ayant le même rôle, nous cherchons simplement une homographie de $\mathscr{H}$ qui envoie u sur i et v sur $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}$.

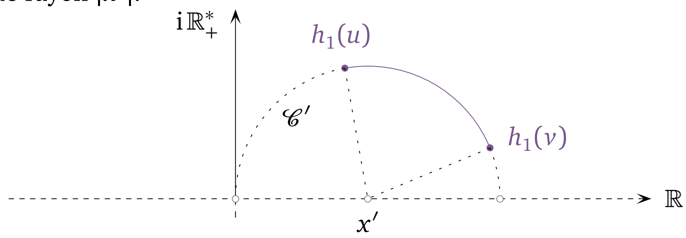
- **Cas où** $\mathrm{Re}(u)=\mathrm{Re}(v)$ **:** Dans ce cas, $\delta = d(u,v) = \left|\ln \dfrac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)}\right|$ donc $\dfrac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)}$ vaut e^{δ} ou $\mathrm{e}^{-\delta}$.

  Par ailleurs, l'homographie $z \overset{h_1}{\longmapsto} \dfrac{z-\mathrm{Re}(u)}{\mathrm{Im}(u)}$ envoie u sur i et v sur $\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)}$, donc nous avons terminé si $\dfrac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)} = \mathrm{e}^{\delta}$. Si au contraire $\dfrac{\mathrm{Im}(v)}{\mathrm{Im}(u)} = -\delta$, alors en notant h_2 l'homographie $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$, la composée $h_2 \circ h_1$ envoie u sur i et v sur $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}$ et c'est terminé aussi.

- **Cas où** $\mathrm{Re}(u) \neq \mathrm{Re}(v)$ **:** C'est bien plus long. En tout cas, les points u et v sont situés sur un demi-cercle unique $\mathscr{C}$ de centre réel x. Géométriquement, x n'est jamais que l'intersection de l'axe $\mathbb{R}$ avec la médiatrice du segment d'extrémités u et v. L'hypothèse selon laquelle $\mathrm{Re}(u) \neq \mathrm{Re}(v)$ nous garantit que ces deux droites se coupent — en un et un seul point.



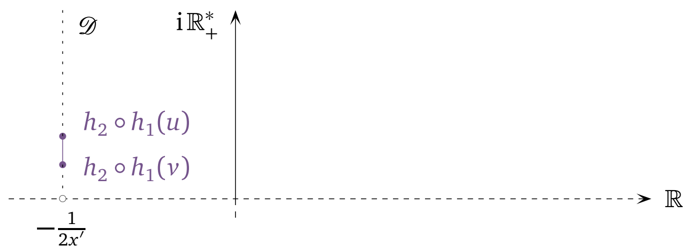
Translatons horizontalement le demi-cercle $\mathscr{C}$ pour le forcer à passer par 0. La translation utilisée, disons $z \overset{h_1}{\longmapsto} z+t$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, est une homographie de $\mathscr{H}$. L'image de $\mathscr{C}$ par h_1 est un demi-cercle $\mathscr{C}'$ de centre $x' = x+t$ et de rayon $|x'|$.



Quelle est à présent l'image de $\mathscr{C}'$ par l'homographie $z \overset{h_2}{\longmapsto} -\dfrac{1}{z}$? Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathscr{C}' \iff |z-x'| = |x'| \iff \left|1-\frac{x'}{z}\right| = \left|\frac{x'}{z}\right| \iff \big|1+x'h_2(z)\big| = \big|x'h_2(z)\big| \iff \left|h_2(z)+\frac{1}{x'}\right| = \big|h_2(z)\big|$$
$$\iff h_2(z) \text{ appartient à la médiatrice du segment d'extrémités } 0 \text{ et } -\frac{1}{x'} \iff \mathrm{Re}\big(h_2(z)\big) = -\frac{1}{2x'}.$$

L'image de $\mathscr{C}'$ par h_2 est ainsi la demi-droite verticale $\mathscr{D}$ d'abscisse $-\dfrac{1}{2x'}$.

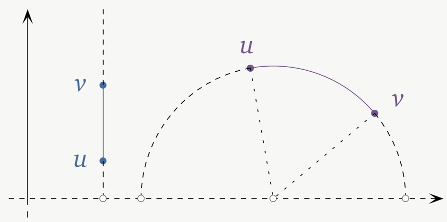


À ce stade : $\quad \mathrm{Re}\big(h_2 \circ h_1(u)\big) = \mathrm{Re}\big(h_2 \circ h_1(v)\big), \quad$ donc nous sommes ramenés au cas précédent et, quitte à composer par une nouvelle homographie h_3, nous savons envoyer u sur i et v sur $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\delta}$ par une isométrie.

Théorème (Géodésiques de $\mathscr{H}$) Soient $u, v \in \mathbb{C}$.

(i) Si $\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(v)$, les géodésiques de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v sont les courbes paramétrées de $\mathscr{H}$ qui parcourent sans retour en arrière le segment vertical entre ces points.

(ii) Si $\mathrm{Re}(u) \neq \mathrm{Re}(v)$, les géodésiques de $\mathscr{H}$ d'origine u et d'extrémité v sont les courbes paramétrées de $\mathscr{H}$ qui parcourent sans retour en arrière le demi-cercle de centre réel contenant ces points.



Démonstration Simple conséquence des résultats précédents !

— Nous connaissons les géodésiques imaginaires pures.

— Par 2-homogénéité, nous savons transporter tout couple de points sur $\mathrm{i}\,\mathbb{R}_+^*$.

— Nous savons que l'image d'une géodésique par une homographie est encore une géodésique.

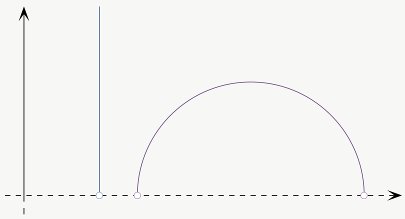
— Pour finir, nous avons suivi pas à pas les points u et v dans la preuve précédente et nous avons compris que, selon le cas, la géodésique d'origine u et d'extrémité v sera une demi-droite ou bien un demi-cercle de centre réel.

3.6 Conclusion

Il est grand temps pour nous de retrouver Euclide et son cinquième postulat. Il est maintenant clair en principe qu'aller droit dans $\mathscr{H}$, i.e. aller au plus court, ce n'est pas forcément pareil qu'aller droit dans $\mathbb{C}$.

Définition (Droite de $\mathscr{H}$, droites parallèles)

- **Droites :** On appelle *droite de $\mathscr{H}$* toute partie de $\mathscr{H}$ qui est :
  — soit l'intersection de $\mathscr{H}$ et d'une droite verticale de $\mathbb{C}$ (une demi-droite verticale),
  — soit l'intersection de $\mathscr{H}$ et d'un cercle de $\mathbb{C}$ de centre réel (un demi-cercle de centre réel).



- **Droites parallèles :** Deux droites hyperboliques sont dites *parallèles* si elles sont disjointes.

Et enfin, roulements de tambour...

Théorème (Droites de $\mathscr{H}$ et postulats d'Euclide)

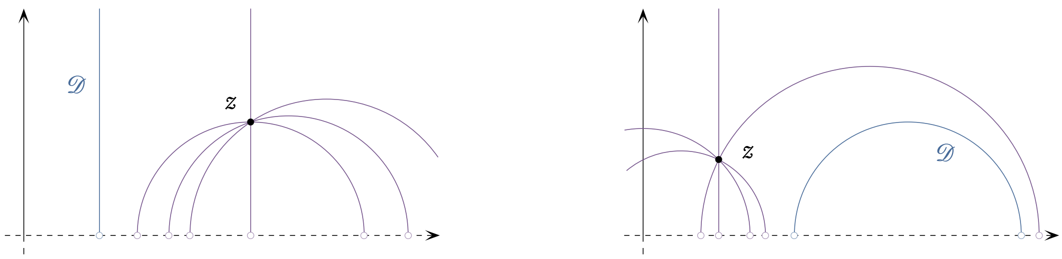
(i) Par deux points distincts de $\mathscr{H}$ passe une et une seule droite de $\mathscr{H}$.

(ii) Soient $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{H}$ et $z \in \mathscr{H}$. Il existe une infinité de droites de $\mathscr{H}$ parallèles à $\mathscr{D}$ passant par z.

Démonstration

(i) Pour les demi-droites verticales, c'est assez évident, et pour les demi-cercles de centre réel, on l'a prouvé au passage dans notre théorème final sur les géodésiques.

(ii) Quelques dessins valent mieux qu'un long discours.



Nous arrivons plus ou moins au terme de cette aventure, mais pas tout à fait. Nous avons prouvé que $\mathscr{H}$ est un espace métrique géodésique 2-homogène, mais un détail qui a son importance nous a échappé — $\mathscr{H}$ est-il bien une surface au sens de la distance hyperbolique ? La réponse est oui, bien sûr, mais nous allons le montrer rapidement sans trop détailler car l'argument final est un peu subtil.

Définition-théorème (Fonction argument tangente hyperbolique)

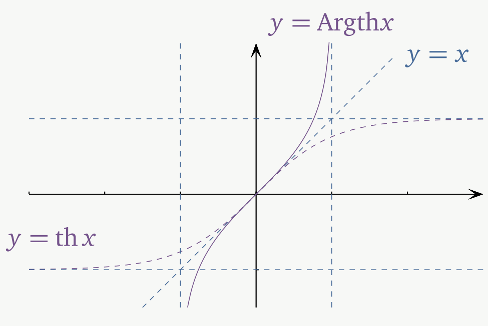
(i) **Définition :** La fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On appelle *fonction argument tangente hyperbolique* sa réciproque, notée Argth.

Pour tout $x \in]-1,1[$: $\quad \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

(ii) **Inégalités de convexité :**

Pour tout $x \in]-1,1[$: $\quad |\operatorname{Argth} x| \geqslant |x|$

et pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$: $\quad |\operatorname{Argth} x| \leqslant |x| \ln 3$.



Démonstration

(i) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $\quad y = \operatorname{th} x \iff y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$. Pas de solution pour $y = 1$, et dans le cas contraire : $\quad y = \operatorname{th} x \iff e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. Cette fois, l'équation n'a pas de solution si $\dfrac{1+y}{1-y} \leqslant 0$. Pour $y \in \left]-1,1\right[$ au contraire : $\quad y = \operatorname{th} x \iff x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$.

(ii) La fonction Argth est convexe sur $[0,1[$ car sa dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ y est croissante. Or sa tangente en 0 a pour équation $y = x$ et sa corde d'extrémités 0 et $\dfrac{1}{2}$ a pour équation $y = x\ln 3$. Les inégalités souhaitées en découlent sur $[0,1[$, et par parité, elles le sont à $]-1,1[$.

Théorème **(Une formule explicite pour la distance sur $\mathscr{H}$)** Pour tous $u, v \in \mathscr{H}$: $\quad d(u,v) = 2\operatorname{Argth}\left|\dfrac{u-v}{u-\overline{v}}\right|$.

Démonstration Posons $D(u,v) = 2\operatorname{Argth}\left|\dfrac{u-v}{u-\overline{v}}\right|$ pour tous $u, v \in \mathscr{H}$ — le module appartient à $]-1,1[$ car u et v appartiennent à $\mathscr{H}$ — et montrons que $D = d$.

- Pour commencer, pour tous $\alpha, \beta > 0$ pour lesquels $\alpha \leqslant \beta$:
$$D(i\alpha, i\beta) = 2\operatorname{Argth}\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right| = 2\operatorname{Argth}\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta} = \ln\frac{1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}}{1-\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}} = \ln\frac{\beta}{\alpha} = d(i\alpha, i\beta)$$
et le résultat est aussi valable si $\alpha > \beta$.

- Montrons ensuite que pour toute homographie h de $\mathscr{H}$ et tous $u, v \in \mathscr{H}$: $\quad D\big(h(u), h(v)\big) = D(u,v)$. Le résultat se vérifie aisément lorsque h est l'homographie $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ ou l'une des homographies $z \longmapsto \alpha z + \beta$, (α, β) décrivant $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Or nous avons déjà observé que toute homographie est une composée de ces homographies de base, donc la formule souhaitée est vraie de toute homographie.

- Finalement, soient $u, v \in \mathscr{H}$. Par 2-homogénéité, il existe une homographie h de $\mathscr{H}$ pour laquelle $h(u) = i$ et $h(v) = i\,e^{d(u,v)}$. Par conséquent : $\quad D(u,v) = D\big(h(u), h(v)\big) = D\big(i, i\,e^{d(u,v)}\big) = d\big(i, i\,e^{d(u,v)}\big) = d(u,v)$.

Théorème Le demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$ est une surface géodésique 2-homogène.

Démonstration Il nous suffit de montrer que $\mathbb{C}$ et $\mathscr{H}$ sont homéomorphes pour leurs distances respectives $d_{\mathbb{C}}$ et d, il en découlera en particulier que $\mathscr{H}$ est une surface.

- Montrons que la fonction identité Id est continue de $(\mathscr{H}, d_{\mathbb{C}})$ dans $(\mathscr{H}, d)$. Fixons $u \in \mathscr{H}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $z \in \mathscr{H}$ pour lequel $d(z,u) \leqslant \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2\operatorname{Im}(u)}\right\}$: $\quad 2\left|\dfrac{z-u}{z-\overline{u}}\right| \leqslant 2\operatorname{Argth}\left|\dfrac{z-u}{z-\overline{u}}\right| = d(z,u)$, $\quad$ donc :
$$2|z-u| \leqslant |z-\overline{u}|\,d(z,u) \leqslant \big(|z-u| + |u-\overline{u}|\big)\,d(z,u) = |z-u|\,d(z,u) + 2\operatorname{Im}(u)\,d(z,u) \leqslant |z-u| + 2\operatorname{Im}(u)\,d(z,u),$$
donc $\big|\operatorname{Id}(z) - \operatorname{Id}(u)\big| = |z-u| \leqslant 2\operatorname{Im}(u)\,d(z,u) < \varepsilon$.

- Montrons maintenant que Id est continue de $(\mathscr{H}, d)$ dans $(\mathscr{H}, d_{\mathbb{C}})$. Fixons $u \in \mathscr{H}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $z \in \mathscr{H}$ pour lequel $|z-u| \leqslant \min\left\{\dfrac{\operatorname{Im}(u)}{4}, \dfrac{\operatorname{Im}(u)\,\varepsilon}{4\ln 3}\right\}$: $\quad |z-\overline{u}| \geqslant |\overline{u}| - |z-u| \geqslant \operatorname{Im}(u) - \dfrac{\operatorname{Im}(u)}{2} = \dfrac{\operatorname{Im}(u)}{2}$, $\quad$ donc $\left|\dfrac{z-u}{z-\overline{u}}\right| \leqslant \dfrac{2|z-u|}{\operatorname{Im}(u)} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc :
$$d\big(\operatorname{Id}(z), \operatorname{Id}(u)\big) = d(z,u) = 2\operatorname{Argth}\left|\frac{z-u}{z-\overline{u}}\right| \leqslant 2\ln 3\left|\frac{z-u}{z-\overline{u}}\right| \leqslant 2\ln 3 \times \frac{2|z-u|}{\operatorname{Im}(u)} < \varepsilon.$$

- Au point où nous en sommes, la fonction Id est un homéomorphisme de $(\mathscr{H}, d)$ sur $(\mathscr{H}, d_{\mathbb{C}})$. Il nous suffit dès lors de montrer que $(\mathscr{H}, d_{\mathbb{C}})$ et $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ sont homéomorphes, car $(\mathscr{H}, d)$ et $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ le seront alors, la composée de deux homéomorphismes étant un homéomorphisme.

  Or les fonctions $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Re}(z) + i\ln\operatorname{Im}(z) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Re}(z) + i\,e^{\operatorname{Im}(z)} \end{array}\right.$ sont à la fois continues au sens de la distance usuelle $d_{\mathbb{C}}$ et réciproques l'une de l'autre, donc en effet, $\mathscr{H}$ et $\mathbb{C}$ sont homéomorphes au sens de la distance $d_{\mathbb{C}}$.