Un encadrement de l'écart entre les moyennes arithmétique et géométrique

Dans sa version la plus courante, l'inégalité arithmético-géométrique compare la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, éventuellement pondérées, d'une famille finie de réels strictement positifs. Dans ce petit article, nous privilégierons cependant une formulation probabiliste des résultats présentés. Donnons-nous ainsi une fois pour toutes un espace probabilisé fini $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ et une variable aléatoire strictement positive X sur Ω de valeurs $x_1, \ldots, x_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, nous noterons p_k le réel $P(X = x_k)$.

Dans ce cadre, la *moyenne arithmétique* de X n'est jamais que son espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$ et sa *moyenne géométrique* est par définition le réel $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \ln x_k\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(\ln X)}$.

Théorème (Inégalité arithmético-géométrique) $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) \leqslant \mathrm{E}(X)$.

Démonstration D'après l'inégalité de Jensen, par concavité du logarithme :

$$\ln \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \ln x_k \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) = \ln \mathrm{E}(X), \qquad \text{donc } \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) \leqslant \mathrm{E}(X).$$

On peut cela dit exploiter la même concavité autrement via l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$. En effet :
$\ln \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) = \mathrm{E}(\ln X) = \mathrm{E}\left(\ln \dfrac{X}{\mathrm{E}(X)}\right) + \ln \mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{X}{\mathrm{E}(X)} - 1\right) + \ln \mathrm{E}(X) = \ln \mathrm{E}(X)$, donc $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) \leqslant \mathrm{E}(X)$.

L'estimation de l'écart $\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X)$ a naturellement donné lieu à de nombreuses propositions. Cartwright et Field ont ainsi obtenu un encadrement de $\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X)$ en fonction de la *variance* $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big)$ de X.

Théorème (Cartwright & Field, 1978) $\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2 \max X} \leqslant \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}_{\mathrm{G}}(X) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{2 \min X}$.

Sans être longue, la preuve par récurrence publiée en 1978 est assez sophistiquée. L'ingrédient principal en est le théorème des extrema liés, où ce sont les poids $p_1, \ldots, p_n$ que Cartwright et Field font varier plutôt que les réels $x_1, \ldots, x_n$.

Une démonstration vraiment très élémentaire du résultat est proposée ci-dessous, tirée de l'inégalité suivante.

Théorème Pour tout $x > 0$: $\dfrac{(x-1)^2}{2 \max\{1, x\}} \leqslant x - 1 - \ln x \leqslant \dfrac{(x-1)^2}{2 \min\{1, x\}}$.

Démonstration Fixons $x > 0$ et observons que $x - 1 - \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{x-t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, si $x \geqslant 1$:

$$\frac{(x-1)^2}{2x} = \int_1^x \frac{t-1}{x}\,\mathrm{d}t \leqslant x - 1 - \ln x \leqslant \int_1^x \frac{x-t}{1^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^2}{2},$$

et de même, si $x \leqslant 1$: $\dfrac{(x-1)^2}{2} = \displaystyle\int_x^1 \frac{t-x}{1^2}\,\mathrm{d}t \leqslant x - 1 - \ln x \leqslant \int_x^1 \frac{1-t}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{(x-1)^2}{2x}$.

On peut aussi éviter tout recours à des intégrales et se contenter de deux études de fonctions. Les fonctions $x \longmapsto x - 1 - \ln x - \dfrac{(x-1)^2}{2}$ et $x \longmapsto x - 1 - \ln x - \dfrac{(x-1)^2}{2x}$ ont pour dérivées respectives $x \longmapsto -\dfrac{(x-1)^2}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{2x^2}$. Leurs variations en découlent, puis leur signe aussitôt.

Convenons à présent d'appeler *variance géométrique* de X le réel $\mathrm{V_G}(X)=\mathrm{E}\Big(\big(X-\mathrm{E_G}(X)\big)^2\Big)$. Aussitôt :

$$\mathrm{V_G}(X)-\mathrm{V}(X)=\Big(\mathrm{E}\big(X^2\big)-2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}_G(X)+\mathrm{E_G}(X)^2\Big)-\Big(\mathrm{E}\big(X^2\big)-\mathrm{E}(X)^2\Big)=\big(\mathrm{E}(X)-\mathrm{E_G}(X)\big)^2\geqslant 0,\qquad \text{donc } \mathrm{V}(X)\leqslant \mathrm{V_G}(X).$$

Théorème $\dfrac{\mathrm{V_G}(X)}{2\,\max X}\leqslant \mathrm{E}(X)-\mathrm{E_G}(X)\leqslant \dfrac{\mathrm{V_G}(X)}{2\,\min X}$.

Démonstration D'après l'inégalité min-max précédente appliquée à $\dfrac{X(\omega)}{\mathrm{E_G}(X)}$ pour tout $\omega\in\Omega$:

$$\frac{\big(X-\mathrm{E_G}(X)\big)^2}{2\,\mathrm{E_G}(X)\,\max\big\{\mathrm{E_G}(X),X\big\}}\leqslant \frac{X}{\mathrm{E_G}(X)}-1-\ln\frac{X}{\mathrm{E_G}(X)}\leqslant \frac{\big(X-\mathrm{E_G}(X)\big)^2}{2\,\mathrm{E_G}(X)\,\min\big\{\mathrm{E_G}(X),X\big\}}.$$

Cela dit, $\mathrm{E_G}(X)$ est compris entre $\min X$ et $\max X$, donc pour tout $\omega\in\Omega$, $\min\big\{\mathrm{E_G}(X),X(\omega)\big\}\geqslant \min X$ et $\max\big\{\mathrm{E_G}(X),X(\omega)\big\}\leqslant \max X$. Ainsi, après multiplication par $\mathrm{E_G}(X)$:

$$\frac{\big(X-\mathrm{E_G}(X)\big)^2}{2\,\max X}\leqslant X-\mathrm{E_G}(X)-\mathrm{E_G}(X)\big(\ln X-\ln \mathrm{E_G}(X)\big)\leqslant \frac{\big(X-\mathrm{E_G}(X)\big)^2}{2\,\min X}.$$

Le résultat en découle par croissance de l'espérance car $\mathrm{E}(\ln X)=\ln \mathrm{E_G}(X)$.

Théorème $\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2\,\max X}\leqslant\dfrac{\mathrm{V_G}(X)}{2\,\max X}\leqslant \mathrm{E}(X)-\mathrm{E_G}(X)\leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{2\,\min X}\leqslant\dfrac{\mathrm{V_G}(X)}{2\,\min X}$.

Démonstration Comme $\mathrm{V}(X)\leqslant \mathrm{V_G}(X)$, il nous reste à montrer que $\mathrm{E}(X)-\mathrm{E_G}(X)\leqslant\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2\,\min X}$. Or toujours d'après notre inégalité min-max appliquée cette fois à $\dfrac{X(\omega)}{\mathrm{E}(X)}$ pour tout $\omega\in\Omega$:

$$\frac{X}{\mathrm{E}(X)}-1-\ln\frac{X}{\mathrm{E}(X)}\leqslant\frac{\big(X-\mathrm{E}(X)\big)^2}{2\,\mathrm{E}(X)\,\min\big\{\mathrm{E}(X),X\big\}}\leqslant\frac{\big(X-\mathrm{E}(X)\big)^2}{2\,\mathrm{E}(X)\,\min X},$$

donc par croissance de l'espérance : $\mathrm{E}\big(\ln \mathrm{E}(X)-\ln X\big)=\mathrm{E}\left(\dfrac{X}{\mathrm{E}(X)}-1-\ln\dfrac{X}{\mathrm{E}(X)}\right)\leqslant\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2\,\mathrm{E}(X)\,\min X}$. Pour conclure, exploitons l'inégalité des accroissements finis et l'inégalité arithmético-géométrique $\mathrm{E}(\ln X)\leqslant \ln \mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X)-\mathrm{E_G}(X)=\mathrm{e}^{\ln \mathrm{E}(X)}-\mathrm{e}^{\mathrm{E}(\ln X)}\leqslant \mathrm{e}^{\ln \mathrm{E}(X)}\big(\ln \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(\ln X)\big)=\mathrm{E}(X)\big(\ln \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(\ln X)\big)\leqslant\frac{\mathrm{V}(X)}{2\,\min X}.$$

La démonstration qui précède m'est venue plus ou moins par hasard en août 2024, mais j'ai découvert après coup qu'un certain Mercer a eu la même idée en 2003. Sa preuve ne repose pas sur mon inégalité min-max, mais sur l'inégalité légèrement meilleure : $\dfrac{(x-1)^2}{x+\max\big\{1,x\big\}}\leqslant x-1-\ln x\leqslant\dfrac{(x-1)^2}{x+\min\big\{1,x\big\}}$.

Pour en savoir plus :

- D. I. Cartwright & J. M. Field, *A refinement of the arithmetic mean-geometric mean inequality*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 71, numéro 1 (1978), pages 36-38.
- P. R. Mercer, *Refined arithmetic, geometric and harmonic mean inequalities*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 33, numéro 4 (2003), pages 1459-1464.