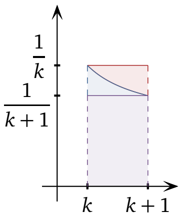
ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 2

Ce chapitre est avant tout un recueil de problèmes typiques d'analyse asymptotique, mais plus délicats et plus intéressants que ceux que nous avons résolus au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 1 ». À l'exception de la formule de Stirling, aucun des résultats généraux que j'ai choisi d'encadrer ne figure au programme de MPSI. Étudiez-les comme des exemples privilégiés, des idées classiques à méditer et non pas pas des théorèmes de cours à connaître.

1 ÉTUDES DE SOMMES PAR ENCADREMENT D'INTÉGRALES

Nous avons vu récemment que toute intégrale peut être approchée par des sommes par construction de l'intégrale. Rappelons simplement que les sommes en question représentent dans ce cadre des « aires sous la courbe » de fonctions en escalier. L'idée de base de ce paragraphe, c'est qu'on peut aussi faire l'inverse et approximer certaines sommes par des intégrales. C'est déjà ce que nous avons fait avec les sommes de Riemann.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{O}(1)$. En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.



Démonstration Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$, par décroissance de la fonction inverse : $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, donc $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, donc par somme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, et si on retourne maintenant cette inégalité comme un gant en y plaçant la somme au centre, on obtient ceci : $\displaystyle\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \ln n + 1$, i.e. $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n \leqslant 1$, et donc enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{O}(1)$.

Le théorème qui suit reprend l'idée précédente, mais il va plus loin.

Théorème (Comparaison somme-intégrale) Soit $f \in \mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ une fonction positive décroissante.

Pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1).$$

Démonstration Pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k) = -f(1) + \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)\right) = -f(1) + \sum_{k=2}^{n} a_k$ si on pose $\displaystyle a_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$ pour tout $k \geqslant 2$. Or par décroissance :
$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,\mathrm{d}t = f(k-1),$$
donc $0 \leqslant a_k \leqslant f(k-1) - f(k)$. Il découle de cet encadrement que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante, mais aussi majorée car pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=2}^{n}\big(f(k-1) - f(k)\big) = f(1) - f(n) \leqslant f(1)$. Cette suite est ainsi convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite λ. Finalement :
$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k) = -f(1) + \sum_{k=2}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} \lambda - f(1) + \mathrm{o}(1) \qquad \text{et c'est fini.}$$

En particulier, dans le cas de la fonction inverse :

Théorème (Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1) \qquad \text{pour un certain réel } \gamma \approx 0,577 \text{ appelé la } \textit{constante d'Euler}.$$

2 Suites d'intégrales et fonctions définies par une intégrale

Comme nous le savons déjà, il suffit parfois d'un simple encadrement pour trouver un équivalent d'intégrale.

Exemple $\displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \ln t \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}-1)\ln x.$

Démonstration Pour tout $x>0$: $\displaystyle \ln x \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \ln(x+1) \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t,$

donc : $\displaystyle \left(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^x\right)\ln x \leqslant \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \left(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^x\right)\ln(x+1),$

d'où le résultat par encadrement car $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

Souvent hélas, encadrer ne suffit pas, voici donc une idée parmi d'autres. Une intégration par parties transforme toujours une intégrale en une somme de deux termes — un crochet et une autre intégrale — et quand on s'y prend bien, cette décomposition peut fournir un début de développement asymptotique pour l'intégrale de départ.

Théorème (Un exemple de développement asymptotique par IPP) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right). \qquad \text{En particulier, si } f(1)\neq 0 : \quad \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Démonstration Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\,f(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or f' est continue sur le **segment** $[0,1]$, donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle \left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f'\|_\infty \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f'\|_\infty}{n+2},$ donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par encadrement.

Conclusion : $\displaystyle \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$

Exemple $\displaystyle \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$

Démonstration Tâchons d'adapter la preuve du théorème précédent au contexte de cette nouvelle intégrale. Pour commencer, pour tout $x>0$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\times\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2x} - \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

or : $\displaystyle \left|\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x},$ donc en effet :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2x} - \frac{2}{x}\times\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3 Suites récurrentes

Dans l'exemple qui suit, les termes du développement asymptotique sont obtenus les uns après les autres du plus grand au plus petit selon un principe de boucle. À chaque fois qu'on vient d'obtenir un terme d'une certaine précision, on réinjecte le tout dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme. On peut sur le papier obtenir de cette manière des précisions aussi fines que voulu, mais plus on avance, plus les réinjections sont calculatoires.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n-\frac{1}{2}-\frac{3}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Démonstration Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$: $\sqrt{x+n^2}\geqslant 0$ et $u_0\geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\sqrt{u_{n-1}+(n-1)^2}\geqslant n-1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ par minoration.
- Montrons ensuite par récurrence que $u_n\leqslant n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. **Initialisation :** Évidente.
  Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $u_n\leqslant n$, alors $u_{n+1}=\sqrt{u_n+n^2}\overset{\text{HDR}}{\leqslant}\sqrt{n^2+n}\leqslant\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$.
- À ce stade, $n-1\leqslant u_n\leqslant n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n$ par encadrement, et même $u_n\underset{n\to+\infty}{=}n+\mathrm{O}(1)$.

  En retour : $u_n=\sqrt{u_{n-1}+(n-1)^2}\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{(n-1)^2+(n-1)+\mathrm{O}(1)}\underset{n\to+\infty}{=}n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$
  $$\underset{n\to+\infty}{=}n\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}n-\frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{car }\sqrt{1+x}\underset{u\to0}{=}1+\frac{x}{2}+\mathrm{O}\left(x^2\right).$$
- Poursuivons sur cette lancée avec un développement limité plus fin de $x\longmapsto\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 :
  $$u_n=\sqrt{u_{n-1}+(n-1)^2}\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{(n-1)^2+n-\frac{3}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$
  $$\underset{n\to+\infty}{=}n\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{n}\right)^2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\qquad\text{car }\sqrt{1+x}\underset{x\to0}{=}1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\mathrm{O}\left(x^3\right)$$
  $$\underset{n\to+\infty}{=}n\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}n-\frac{1}{2}-\frac{3}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le théorème qui suit, au programme en deuxième année, permet de pousser plus loin l'étude asymptotique des suites récurrentes dans bon nombre de situations.

Théorème (Sommation des relations de comparaison) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On pose $A_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ et $B_n=\sum\limits_{k=1}^n b_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $b_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=+\infty$.

(i) Si $a_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(b_n)$, alors $A_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(B_n)$. (ii) Si $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$, alors $A_n\underset{n\to+\infty}{\sim}B_n$.

Le résultat reste vrai si $b_n<0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=-\infty$.

On généralise ici le théorème de Cesàro dans le cas d'une limite finie. En effet, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, alors $a_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(1)$ si $\ell=0$ et $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ell$ si $\ell\neq0$, donc $A_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(n)$ si $\ell=0$ et $A_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ell$ si $\ell\neq0$. Dans les deux cas : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A_n}{n}=\ell$.

Démonstration

(i) Faisons l'hypothèse que $a_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(b_n)$. Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse, $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}|b_n|=\frac{\varepsilon}{2}b_n$ à partir d'un certain rang N. Pour tout $n\geqslant N$:
$$|A_n|\leqslant\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right|}_{\substack{\text{Quantité } S\\ \text{indép. de } n.}}+\sum_{k=N}^n|a_k|<S+\sum_{k=N}^n\frac{\varepsilon}{2}b_k\leqslant S+\frac{\varepsilon}{2}\left(B_n-B_N\right)\leqslant S+\frac{\varepsilon}{2}B_n.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=+\infty$, donc $S\leqslant\frac{\varepsilon}{2}B_n$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$:
$$|A_n|<\frac{\varepsilon}{2}B_n+\frac{\varepsilon}{2}B_n=\varepsilon B_n.\qquad\text{Conclusion : }\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{B_n}=1,\quad\text{donc }A_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(B_n).$$

(ii) Si $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$, alors $a_n-b_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(b_n)$, donc $A_n-B_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(B_n)$ d'après (i), et enfin $A_n\underset{n\to+\infty}{\sim}B_n$. ■

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\operatorname{Arctan} u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{40\sqrt{2}}\times\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$.

Démonstration

- Pour commencer, $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction arctangente et $0\leqslant \operatorname{Arctan} x\leqslant x$ pour tout $x\geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Sa limite est un point fixe de la fonction arctangente qui est continue sur $\mathbb{R}$ et n'admet que 0 pour point fixe, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
- À présent, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$:
$$(\operatorname{Arctan} x)^\alpha-x^\alpha \underset{x\to0}{=} \left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^\alpha-x^\alpha \underset{x\to0}{=} x^\alpha\left(\left(1-\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^\alpha-1\right) \underset{x\to0}{\sim} x^\alpha\times\left(-\frac{\alpha x^2}{3}\right) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{\alpha}{3}\,x^{\alpha+2},$$
et cette quantité possède une limite finie pour $\alpha=-2$, en l'occurrence $\lim\limits_{x\to0}\left((\operatorname{Arctan} x)^{-2}-x^{-2}\right)=\dfrac{2}{3}$. Il en découle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2}\right)=\dfrac{2}{3}$, i.e. que $u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{3}$. En retour, par sommation des équivalents :
$u_n^{-2}-u_0^{-2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(u_k^{-2}-u_{k-1}^{-2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2n}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{3}=+\infty$, donc $u_n^{-2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2n}{3}$, et enfin $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{3}{2n}}$.
- Poussons la démarche un terme plus loin, mais sans détailler les calculs :
$(\operatorname{Arctan} x)^{-2}-x^{-2}\underset{x\to0}{=}\dfrac{2}{3}-\dfrac{x^2}{15}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$, donc $u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2}-\dfrac{2}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{u_n^2}{15}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{10n}$, donc par sommation des équivalents : $u_n^{-2}-u_0^{-2}-\dfrac{2n}{3}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(u_k^{-2}-u_{k-1}^{-2}-\frac{2}{3}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln n}{10}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{10}=+\infty$.
Finalement : $$u_n\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{2n}{3}-\frac{\ln n}{10}+\mathrm{o}(\ln n)\right)^{-\frac{1}{2}}\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(1-\frac{3\ln n}{20n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(1+\frac{3\ln n}{40n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{\frac{3}{2n}}+\frac{3\sqrt{3}}{40\sqrt{2}}\times\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).$$

4 Solutions d'équations définies implicitement

Exemple Pour tout $\varepsilon>0$, l'équation $\mathrm{e}^{-\varepsilon x}=x$ d'inconnue x possède une et une seule solution x_ε dans $\mathbb{R}_+$.
Alors $x_\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{=}1-\varepsilon+\dfrac{3\varepsilon^2}{2}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right)$.

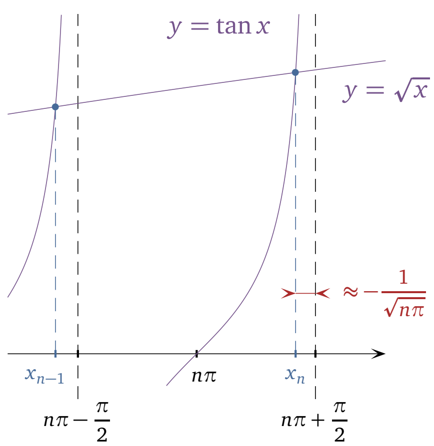
Démonstration Soit $\varepsilon>0$. La fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^{-\varepsilon x}-x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par somme, de valeur 1 en 0 et de limite $-\infty$ en $+\infty$. D'après le TVI strictement monotone, 0 possède un unique antécédent x_ε par cette fonction.

Par positivité de x_ε pour tout $\varepsilon>0$: $0\leqslant x_\varepsilon=\mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon}\leqslant 1$, puis en retour : $\mathrm{e}^{-\varepsilon}\leqslant x_\varepsilon\leqslant 1$. Il en découle que $\lim\limits_{\varepsilon\to0}x_\varepsilon=1$ par encadrement, i.e. que $x_\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{=}1+\mathrm{o}(1)$.

Réinjectons aussitôt dans la relation qui définit x_ε : $x_\varepsilon=\mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon}\underset{\varepsilon\to0}{=}\mathrm{e}^{-\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon)}\underset{\varepsilon\to0}{=}1-\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon)$.

Une dernière pour la route : $x_\varepsilon=\mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon}\underset{\varepsilon\to0}{=}\mathrm{e}^{-\varepsilon+\varepsilon^2+\mathrm{o}(\varepsilon^2)}\underset{\varepsilon\to0}{=}1+\left(-\varepsilon+\varepsilon^2\right)+\dfrac{1}{2}(-\varepsilon)^2+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right)\underset{\varepsilon\to0}{=}1-\varepsilon+\dfrac{3\varepsilon^2}{2}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right)$.

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x=\sqrt{x}$ d'inconnue $x\in\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ possède une unique solution x_n et $x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.



Démonstration

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $x\overset{f}{\longmapsto}\tan x-\sqrt{x}$ est dérivable sur $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ de dérivée $x\longmapsto 1+\tan^2 x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ strictement positive, car pour tout $x\in\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$:
$$x>\frac{\pi}{2}>\frac{1}{4},\qquad \text{donc } 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}>0.$$

D'après le TVI strictement monotone, après un calcul de limites aux bornes, f s'annule une et une seule fois sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, disons en x_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par encadrement.
- Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = \sqrt{x_n}$ avec $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc par définition d'arctangente : $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, autrement dit $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
- Rappelons enfin que pour tout $x > 0$: $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Il en découle que :
$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctan}\sqrt{x_n} - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$
et enfin $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5 Les formules de Wallis et Stirling

La *formule de Wallis* n'est pas au programme, mais la *formule de Stirling* qui en découle l'est en revanche.

Théorème (Formule de Wallis) $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Démonstration On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ (*intégrales de Wallis*).

- Pour tout $n \geqslant 2$: $I_n \overset{\text{IPP}}{=} \left[\sin^{n-1} t \times (-\cos t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos t \sin^{n-2} t \times (-\cos t)\,\mathrm{d}t$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t \,\mathrm{d}t = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \left(1 - \sin^2 t\right)\mathrm{d}t = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right).$$
Isolant I_n, nous obtenons finalement la relation : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $\bigstar$.
- À présent, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive car $0 < \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+2}} \overset{\bigstar}{=} \frac{2n+2}{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ par encadrement. Nous allons maintenant donner une expression explicite du rapport $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$, noté ρ_n.
- Pour commencer : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$, donc $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$.
Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\rho_n \overset{\bigstar}{=} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\rho_{n-1}$, donc :
$$\rho_n = \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} \times \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2} \times \ldots \times \frac{(5)(3)}{(4)^2} \times \frac{(3)(1)}{(2)^2}\rho_0 = \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\ldots 3^2 1}{\big((2n)(2n-2)\ldots(2)\big)^2} \times \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{(2n+1)\times(2n)!^2}{\big((2n)(2n-2)\ldots(2)\big)^4} \times \frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} = \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 n\pi.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ comme on l'a vu, donc en effet : $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$. ■

Théorème (Formule de Stirling) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \ln \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\, \mathrm{e}^n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$u_{n+1} - u_n = \ln \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!\, \mathrm{e}^{n+1}} - \ln \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\, \mathrm{e}^n} = \ln \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}} = \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$ $$\underset{n\to+\infty}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \quad \text{après calcul.}$$

  Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2\big(u_{n+1} - u_n\big) = 1$, donc $0 \leqslant n^2\big(u_{n+1} - u_n\big) \leqslant 1$ à partir d'un certain rang $N \geqslant 2$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, mais par ailleurs pour tout $n \geqslant N$:
$$u_n - u_N = \sum_{k=N}^{n-1} \big(u_{k+1} - u_k\big) \leqslant \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=N}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{N-1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{N-1} \leqslant 1,$$
  donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge d'après le théorème de la limite monotone, donc la suite $\left(\mathrm{e}^{-u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi, disons vers $\ell > 0$.

- Nous venons d'établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \ell$, i.e. que : $\quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \ell \sqrt{n}$. $\quad$ Il reste à montrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
  Or d'après la formule de Wallis :
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}\,\ell}{\left(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}\,\ell\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\ell} \quad \text{après simplification,}$$
  donc en effet $\ell = \sqrt{2\pi}$. ■