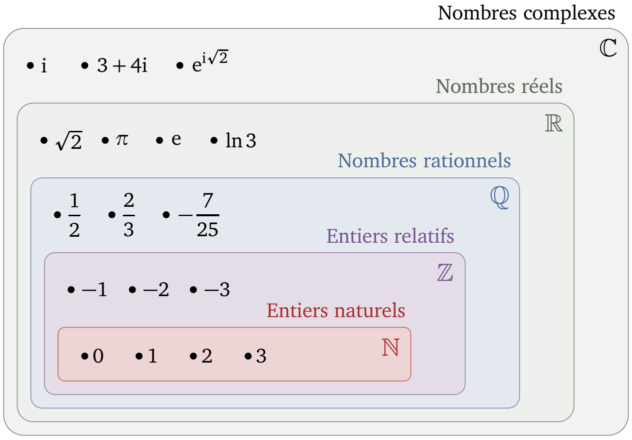
CALCULS ALGÉBRIQUES DANS $\mathbb{R}$



1 ENSEMBLES DE NOMBRES

- **Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:** On rappelle que :
  - $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ privés de 0,
  - $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs (ou nuls) et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs (ou nuls),
  - $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ celui des réels strictement négatifs.
- **Intervalles :** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit différents ensembles de nombres appelés *intervalles* :
  - les *segments* : $[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a \leqslant x \leqslant b\right\}$,
  - les intervalles *ouverts*, par exemple : $]a, b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a < x < b\right\}$ et $]a, +\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x > a\right\}$,
  - les intervalles *semi-ouverts*, par exemple : $[a, b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a \leqslant x < b\right\}$ et $]-\infty, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x \leqslant b\right\}$.
- **Intervalles d'entiers :** Comme on l'a déjà vu, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des ENTIERS compris entre a et b : $[\![a, b]\!] = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \quad a \leqslant n \leqslant b\right\}$, et si $a \leqslant b$, alors $\left|[\![a, b]\!]\right| = b - a \boxed{+1}$.

2 RAPPELS D'ARITHMÉTIQUE

Définition (Divisibilité, diviseur, multiple) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a *divise* b, ce qu'on note $a \mid b$, si $b = ak$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On dit aussi que a est un *diviseur de* b, que b est *divisible par* a ou que b est un *multiple de* a.

Exemple Les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7, ceux de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et ceux de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20, mais dans les trois cas, les opposés sont aussi des diviseurs, par exemple −1 et −7 pour 7.

Théorème (Théorème de la division euclidienne) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un et un seul couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour lequel $a = bq + r$ et $r \in [\![0, b-1]\!]$. On appelle a le *dividende* de la division euclidienne de a par b, b son *diviseur*, q son *quotient* et r son *reste*.

Ainsi, tout entier relatif a peut être ramené *modulo* b, autrement dit à un multiple de b près, à un et un seul entier r compris entre 0 et $b - 1$. En outre, r est nul si et seulement si b divise a.

En particulier, tout entier relatif est pair ou impair, i.e. de la forme $2k$ ou $2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, mais pas les deux.

Définition (Nombre premier) Un entier naturel p est dit *premier* si $p \neq 1$ et si ses seuls diviseurs sont ± 1 et $\pm p$.

Les nombres premiers sont l'analogue arithmétique des particules élémentaires en physique — des entiers qu'on ne peut pas casser en morceaux plus petits. Leur liste commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43...

Théorème (Factorisation première) Tout entier supérieur à 2 peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *factorisation première*, sous la forme $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers rangés dans l'ordre $p_1 < \ldots < p_r$ et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration L'existence se démontre aisément par récurrence FORTE. L'unicité attendra quelques mois.

Initialisation : 2 est premier !

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Faisons l'hypothèse que tout entier compris entre 2 et n est un produit de nombres premiers — éventuellement constitué d'un seul nombre premier. Qu'en est-il de $n+1$? Si $n+1$ est premier, c'est terminé. S'il ne l'est pas, il a des diviseurs positifs autres que 1 et $n+1$, disons a et b avec $n+1 = ab$. Ainsi, a et b sont des produits de nombres premiers par hypothèse de récurrence, donc $n+1$ aussi par produit. ■

Exemple $33 = 3.11$, $60 = 2^2.3.5$, $98 = 2.7^2$, $1000 = 2^3.5^3$.

Théorème (Infinitude de l'ensemble des nombres premiers) L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.

Démonstration Par l'absurde, supposons $\mathbb{P}$ fini et notons $p_1, \ldots, p_r$ ses éléments. L'entier $N = p_1 \ldots p_r + 1$ est supérieur à 2, c'est donc un produit de nombres premiers d'après le théorème précédent. Il possède en particulier un diviseur premier, disons p_k pour un certain $k \in [\![1, r]\!]$. Ainsi, p_k divise à la fois N et $p_1 \ldots p_r$, donc également leur différence $N - p_1 \ldots p_r = 1$. Il en découle que $p_k = 1$ — contradiction. ■

Théorème (Irrationalité de $\sqrt{2}$ et consorts) $\sqrt{p}$ est irrationnel pour tout nombre premier p.

Démonstration Soit p un nombre premier. Supposons par l'absurde que $\sqrt{p}$ est rationnel, disons $\sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$. Notons α (resp. β) l'exposant de p dans la factorisation première de a (resp. b). Dans la relation $a^2 = pb^2$, l'exposant de p vaut 2α à gauche et $2\beta + 1$ à droite, donc $2\alpha = 2\beta + 1$ par unicité de la factorisation première. Cela dit, un entier ne peut pas être à la fois pair et impair — contradiction. ■

Définition-théorème (PGCD, PPCM) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- **PGCD :** Le plus grand diviseur commun positif de a et b est appelé le *PGCD de a et b* et noté $a \wedge b$.
- **PPCM :** Le plus petit multiple commun strictement positif de a et b est appelé le *PPCM de a et b* et $a \vee b$.
- **Calcul à partir des factorisations premières :** Soient $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{N}$. Alors :
$$\left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}\right) \wedge \left(p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}\right) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \ldots p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}} \quad \text{et} \quad \left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}\right) \vee \left(p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}\right) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \ldots p_r^{\max\{\alpha_r, \beta_r\}}.$$

Exemple
$$\begin{cases} 60 \wedge 1000 = 2^2.3^1.5^1 \wedge 2^3.3^0.5^3 = 2^2.5 = 20 \\ 60 \vee 1000 = 2^2.3^1.5^1 \vee 2^3.3^0.5^3 = 2^3.3.5^3 = 3000. \end{cases}$$

Définition (Entiers premiers entre eux) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si leurs seuls diviseurs communs sont ± 1, ce qui revient à dire que $a \wedge b = 1$, ou encore que les factorisations premières de a et b n'ont aucun facteur premier commun.

Exemple $33 = 3.11$ et $98 = 2.7^2$ sont premiers entre eux.

Théorème (Forme irréductible d'un rationnel) Tout rationnel peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $|p|$ et q premiers entre eux.

On fait porter le signe de la fraction sur p et on impose à q d'être positif pour garantir l'unicité de la forme irréductible.

Et pour finir, deux mises au point pratiques.

- **Mise sous forme irréductible :** Pour mettre un rationnel sous forme irréductible, on exploite les factorisations premières et on simplifie. Par exemple : $\dfrac{495}{60} = \dfrac{3^2.5.11}{2^2.3.5} = \dfrac{3.11}{2^2} = \dfrac{33}{4}$.
- **Réduction au même dénominateur :** Pour réduire au même dénominateur la somme de rationnels $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'}$, on choisit le PPCM $b \wedge b'$ comme dénominateur commun, ET SURTOUT PAS le produit bb'.

  Par exemple : $28 \vee 42 = 2^2.7 \vee 2.3.7 = 2^2.3.7 = 28 \times 3 = 42 \times 2$, donc :
$$\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13 \times 3}{28 \times 3} + \frac{5 \times 2}{42 \times 2} = \frac{49}{2^2.3.7} = \frac{7}{12}.$$

3 RAPPELS SUR LES RÉELS

3.1 INÉGALITÉS

Théorème (Rappels sur les inégalités) Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :** Si $a < b$, alors $a \leqslant b$, MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !

Dans les règles qui suivent, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

- **Addition :** Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.
- **Produit :** — **par un réel positif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda a \leqslant \lambda b$.
  — **par un réel négatif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda a \geqslant \lambda b$. On renverse !
  — **d'inégalités positives :** Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$.
- **Inversion :** Si $a \leqslant b$ avec a et b non nuls DE MÊME SIGNE, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
- **Majorer/minorer une fraction :** On suppose $a \geqslant 0$ et $b > 0$.
  Majorer $\dfrac{a}{b}$, c'est majorer a et MINORER b. Au contraire, minorer $\dfrac{a}{b}$, c'est minorer a et MAJORER b.

Attention ! $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $a - c \leqslant b - d$. Pas de soustraction ! Essayez avec $0 \leqslant 1$ et $0 \leqslant 2$.

Exemple Soit $x \in [1, 2]$. Tâchons d'encadrer rapidement mais grossièrement le réel $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$.
Par hypothèse, $1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$. Ensuite, $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ donc $7 \leqslant 3x^2 + 4 \leqslant 16$. Par quotient enfin :
$$\frac{3}{16} \leqslant \frac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \frac{5}{7}.$$

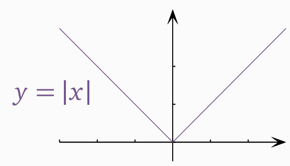
Exemple Pour tout $x > 0$: $\quad x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Démonstration Au brouillon, il est naturel de partir du résultat et de se demander d'où il vient :
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \overset{x>0}{\iff} \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \iff \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \iff \quad (x-1)^2 \geqslant 0,$$
puis d'observer que le carré d'un réel est toujours positif. Sur une copie, pour un calcul aussi simple, il vaut mieux partir de la fin : $\quad (x-1)^2 \geqslant 0, \quad$ développer et en déduire le résultat.

3.2 VALEUR ABSOLUE

Définition-théorème (Rappels sur la valeur absolue)

- **Définition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *valeur absolue de* x le réel $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
  Ce réel est positif, et nul seulement si $x = 0$.
  En outre, x est compris entre $-|x|$ et $|x|$: $\quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

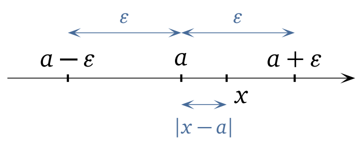


- **Interprétation géométrique :**
  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle.
- **Effet sur une somme ou un produit :**
  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad |xy| = |x| \times |y| \quad$ et $\quad |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad$ (*inégalité triangulaire*).

Attention ! $|x - y| \cancel{=} |x| - |y|$. Dans l'inégalité triangulaire, quand on remplace y par $-y$, c'est toujours un $+$ qu'on trouve à droite : $\quad |x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Exemple Fixons $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Tâchons de résoudre l'inéquation $|x - a| \leqslant \varepsilon$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|x - a| \leqslant \varepsilon \quad \iff \quad -\varepsilon \leqslant x - a \leqslant \varepsilon \quad \iff \quad a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon \quad \iff \quad x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

De façon plus géométrique, on peut aussi observer que $|x-a|$ est la distance entre a et x et méditer la figure ci-contre. Pour finir, on aurait pu travailler avec des inégalités strictes :



$$|x-a| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[.$$

L'exemple qui suit illustre une idée simple et fondamentale. Si une (in)égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par exemple, on peut y remplacer x par n'importe quelle quantité réelle et cela produit souvent de nouveaux résultats.

Exemple Prenons l'inégalité triangulaire comme point de départ : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Premier rebondissement :** Appliquons-la aux réels x et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|x+(-y)\big| \leqslant |x|+|-y|$, i.e. $|x-y| \leqslant |x|+|y|$. Cette inégalité est un nouveau résultat.
- **Deuxième rebondissement :** Appliquons ensuite l'inégalité triangulaire aux réels $x+y$ et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|(x+y)+(-y)\big| \leqslant |x+y|+|-y|$, i.e. $|x| \leqslant |x+y|+|y|$, et donc $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. Encore un nouveau résultat !
- **Troisième rebondissement :** Nous venons de montrer que $|x+y| \geqslant |x|-|y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, mais donc aussi que $|y+x| \geqslant |y|-|x|$ quitte à échanger les rôles de x et y, i.e. $|x+y| \geqslant |y|-|x|$. Ainsi, $|x+y|$ est plus grand que les deux réels $|x|-|y|$ et $|y|-|x|$ qui sont l'opposé l'un de l'autre, donc $|x+y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$.

Finalement, l'inégalité triangulaire contient plus qu'elle-même. En l'occurrence, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y| \qquad \textit{(inégalité triangulaire généralisée).}$$

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche une expression de $|x-3|-|x+2|$ en fonction de x qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue. Comment procéder ?

Comme $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases}$ et $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2, \end{cases}$ nous sommes amenés à couper $\mathbb{R}$ en trois intervalles disjoints : $\mathbb{R} = \left]-\infty,-2\right[\sqcup \left[-2,3\right[\sqcup \left[3,+\infty\right[$, et finalement :

$$|x-3|-|x+2| = \begin{cases} -(x-3)+(x+2) = 5 & \text{si } x \in \left]-\infty,-2\right[\\ -(x-3)-(x+2) = 1-2x & \text{si } x \in \left[-2,3\right[\\ (x-3)-(x+2) = -5 & \text{si } x \in \left[3,+\infty\right[. \end{cases}$$

Exemple On veut résoudre l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- **Résolution sur** $\left[4,+\infty\right[$ **:** Pour tout $x \geqslant 4$: $\quad |x-4| = 2x+10 \quad\Longleftrightarrow\quad x-4 = 2x+10 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -14$, or $-14 \notin \left[4,+\infty\right[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $\left[4,+\infty\right[$.
- **Résolution sur** $\left]-\infty,4\right[$ **:** Pour tout $x < 4$: $\quad |x-4| = 2x+10 \quad\Longleftrightarrow\quad 4-x = 2x+10 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -2$, et $-2 \in \left]-\infty,4\right[$, donc -2 est bien solution. C'est finalement la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple On veut résoudre l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour commencer, l'inéquation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*_-$ car $\dfrac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x-2| \geqslant 0$.

- **Résolution sur** $\left]0,2\right[$ **:** Pour tout $x \in \left]0,2\right[$:

$$|x-2| < \frac{3}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad 2-x < \frac{3}{x} \quad\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\quad x(2-x) < 3 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-2x+3 > 0 \quad\overset{\text{Discriminant } -8}{\Longleftrightarrow}\quad x \in \left]0,2\right[.$$

- **Résolution sur** $\left[2,+\infty\right[$ **:** Pour tout $x \in \left[2,+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} |x-2| < \frac{3}{x} \quad&\Longleftrightarrow\quad x-2 < \frac{3}{x} \quad\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\quad x(x-2) < 3 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-2x-3 < 0 \\ &\Longleftrightarrow\quad (x+1)(x-3) < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \left]-1,3\right[\quad\Longleftrightarrow\quad x \in \left[2,3\right[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions cherché est finalement la réunion d'intervalles $\left]0,2\right[\cup \left[2,3\right[= \left]0,3\right[$.

Attention !

TRÈS GROSSE ERREUR : $\quad x \leqslant y \quad \not\Longrightarrow \quad |x| \leqslant |y|$.

Majorer $|x|$, c'est ENCADRER x, et non pas seulement le majorer.

Quand on veut majorer $|x|$, il faut donc toujours gérer D'ABORD la valeur absolue, souvent grâce à l'inégalité triangulaire.

Supposons par exemple qu'on veuille majorer $|\cos x + \sin x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Votre premier réflexe consiste généralement à majorer $\cos x + \sin x$: $\cos x + \sin x \leqslant \cos x + 1$, ce qui est correct, puis à ajouter des barres $|\ldots|$ de force sans réfléchir : $|\cos x + \sin x| \leqslant |\cos x + 1|\ldots$ **SAUF QUE LÀ C'EST FAUX !** Essayez par exemple avec $x = \pi$.

Quelle majoration de $|\cos x + \sin x|$ proposer dans ces conditions ? Il faut **D'ABORD** gérer la valeur absolue. D'après l'inégalité triangulaire : $|\cos x + \sin x| \leqslant |\cos x| + |\sin x| \leqslant |\cos x| + 1$. Cette fois c'est correct, mais l'inégalité $|\sin x| \leqslant 1$ nous a obligé à **ENCADRER** $\sin x$ entre -1 et 1 et pas seulement à le majorer par 1.

À l'oral, je rappellerai cette erreur en disant qu'il est interdit de « majorer **DANS** la valeur absolue ».

3.3 Puissances et racines carrées

Définition-théorème (Rappels sur les puissances)

- **Définition :** Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^n = \overbrace{x \times \ldots \times x}^{n \text{ termes}}$ avec $x^0 = 1$ par convention,
  et si $x \neq 0$, on pose $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \underbrace{\dfrac{1}{x} \times \ldots \times \dfrac{1}{x}}_{n \text{ termes}}$.
- **Règles de calcul :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$: $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = \left(x^m\right)^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$.
  Ces relations restent vraies si m ou n est négatif à condition que x et y soient non nuls.

On ne vous demande pas tant de connaître ces règles de calcul que de les comprendre parfaitement chaque fois que vous les utilisez. Par exemple, pour les deux premières :

$$x^m x^n = \underbrace{x \ldots x}_{m \text{ termes}} \times \underbrace{x \ldots x}_{n \text{ termes}} = \underbrace{x \ldots x}_{m+n \text{ termes}} = x^{m+n} \qquad \text{et} \qquad \left(x^m\right)^n = \underbrace{\overbrace{x \ldots x}^{m \text{ termes}} \;\ldots\; \overbrace{x \ldots x}^{m \text{ termes}}}_{n \text{ accolades}} = \underbrace{x \ldots x}_{m+\ldots+m \text{ termes}} = \overbrace{x \ldots x}^{mn \text{ termes}} = x^{mn}.$$

Définition-théorème (Rappels sur les racines carrées)

- **Définition :** Pour tout $x \geqslant 0$, il existe un et un seul réel $r \geqslant 0$ pour lequel $x = r^2$. On l'appelle la *racine carrée de x* et on la note $\sqrt{x}$.
- **Effet sur un produit :** Pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Attention ! La quantité $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'est définie que si $x \geqslant 0$, et par définition de la racine carrée : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est toujours définie, mais comme le passage au carré tue le signe de x^2 : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ce qu'il faut retenir, c'est qu'en général : $\boxed{\sqrt{x^2} \cancel{=} x.}$

Attention !

Pour $a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $ax = ay \cancel{\Longleftrightarrow} x = y$, $a^2 = b^2 \cancel{\Longleftrightarrow} a = b$
et pour $a \geqslant 0$: $x^2 = a \cancel{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{a}$.

Ce sont là des **ERREURS GRAVES**. Pour les corriger, un rappel : Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

Il en découle que : $ax = ay \iff a(x-y) = 0 \iff a = 0$ ou $x = y$,
que : $a^2 = b^2 \iff (a+b)(a-b) = 0 \iff a = b$ ou $a = -b \iff |a| = |b|$,
et enfin si $a \geqslant 0$: $x^2 = a \iff \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0 \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

On en déduit une version corrigée des règles erronées précédentes :

Pour tous $a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $ax = ay \iff a = 0$ ou $x = y$,
$a^2 = b^2 \iff a = b$ ou $a = -b \iff |a| = |b|$,
et pour $a \geqslant 0$: $x = \sqrt{a} \iff x^2 = a$ et $x \geqslant 0$.

Exemple On veut résoudre l'équation $|x-2| = 2|x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-2| = 2|x+1| \iff (x-2)^2 = 4(x+1)^2 \iff 3x^2+12x = 0 \overset{\text{Pas de}}{\underset{\text{discriminant !}}{\iff}} x(x+4) = 0 \iff x \in \{-4, 0\}.$$

Exemple On veut résoudre l'équation $\sqrt{x+8} = x+2$ d'inconnue $x \in [-8, +\infty[$.

- **Réponse incorrecte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$:

$$\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2 \iff x^2+3x-4 = 0 \overset{\text{Discriminant } 25}{\iff} x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \iff x \in \{-4, 1\}.$$

Et là — surprise — il se trouve que -4 n'est pas solution car $\sqrt{-4+8} = 2 \neq -2 = -4+2$. Que s'est-il donc passé ? Tout simplement, la première équivalence est fausse. Le passage au carré de gauche à droite est correct, mais pas sa réciproque. En effet, si $x+8 = (x+2)^2$, alors $\sqrt{x+8} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ AVEC UNE VALEUR ABSOLUE ! Bref, le passage au carré ne respecte pas les équivalences et la réciproque doit être pensée avec soin dans chaque situation.

- **Réponse correcte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$:

$$\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2 \quad \text{et} \quad x+2 \geqslant 0 \iff x^2+3x-4 = 0 \quad \text{et} \quad x \geqslant -2$$
$$\overset{\text{Discriminant } 25}{\iff} x \in \{-4, 1\} \quad \text{et} \quad x \geqslant -2 \iff x = 1.$$

Prenez le temps de relire ces équivalences. Vous devez en sortir convaincu que la réciproque appelle la condition $x+2 \geqslant 0$ et que l'essentiel est dans la relation $\sqrt{a^2} = |a|$.

Attention ! Pour $x, a \in \mathbb{R}$: $x \leqslant a \;\cancel{\iff}\; x^2 \leqslant a^2$ et $x^2 \leqslant a^2 \;\cancel{\iff}\; x \leqslant a$.

Par exemple : $\begin{cases} -2 \leqslant 1 \\ (-2)^2 > 1^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} 1 \leqslant (-2)^2 \\ 1 > -2. \end{cases}$ Par bonheur, certaines choses se passent bien.

Pour tous $x, a \in \mathbb{R}$: $x^2 \leqslant a^2 \iff |x| \leqslant |a|$,

pour $x, a \geqslant 0$: $x \leqslant a \iff x^2 \leqslant a^2$,

et pour $x \geqslant 0$ seulement : $x \leqslant a \iff x^2 \leqslant a^2$ et $a \geqslant 0$.

Exemple On veut résoudre l'inéquation $|x-1| \leqslant |2x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-1| \leqslant |2x+1| \iff (x-1)^2 \leqslant (2x+1)^2 \iff 3x^2+6x \geqslant 0 \overset{\text{Pas de}}{\underset{\text{discriminant !}}{\iff}} x(x+2) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[.$$

Exemple On veut résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1$ d'inconnue x...
... mais sur quel ensemble ? Un petit tableau de signe nous permet de le découvrir.

x		1		2	
x^2-3x+2	+	0	−	0	+

L'inéquation n'est définie que sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, et pour tout x dans cet ensemble :

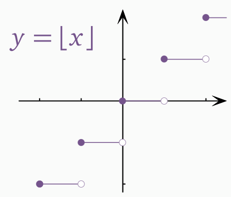
$$\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1 \iff x^2-3x+2 \leqslant (x+1)^2 \quad \text{et} \quad x+1 \geqslant 0 \iff 5x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad x \geqslant -1 \iff x \geqslant \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left[\frac{1}{5}, 1\right] \cup [2, +\infty[$.

3.4 Partie entière

Définition-théorème (Partie entière, partie fractionnaire)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un et un seul entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n \leqslant x < n+1$, appelé la *partie entière de x* et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur (ou égal) à x.



L'essentiel en résumé : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Le réel $x - \lfloor x \rfloor$ est quant à lui appelé la *partie fractionnaire de x* et x est ainsi la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire.

Par exemple : $\lfloor 11 \rfloor = 11$, $\lfloor 5,2 \rfloor = 5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, mais attention : $\lfloor -7,3 \rfloor = -8 \neq -7$.

Les entiers entrent et sortent librement d'une partie entière, autrement dit $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On peut toujours ramener x dans l'intervalle $[0,T[$ en lui ajoutant/retranchant un certain nombre de fois T, mais combien de fois exactement ? On cherche un entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $x - nT \in [0,T[$, i.e. $n \leqslant \frac{x}{T} < n+1$. Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ convient. À retenir :

$$\boxed{x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0,T[.}$$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$, disons $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in [0,1[$. Aussitôt :

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor \qquad \text{et} \qquad \lfloor 2x \rfloor = \big\lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\varepsilon \big\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\varepsilon \rfloor,$$

avec $\varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ et $2\varepsilon \in [0,2[$. Ainsi :

$$\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } \varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lfloor 2\varepsilon \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } 2\varepsilon \in [0,1[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } 2\varepsilon \in [1,2[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

$$\text{donc } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor + 0 & \text{si } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2\lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\varepsilon \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

4 Sommes

4.1 Notation $\sum$

Pour tous $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ avec $m \leqslant n$, on note $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x_k$ la somme $\overbrace{x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n}^{\text{Forme dite } \textit{in extenso} \text{ de la somme}}$. Par exemple, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \qquad \sum_{p=3}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha}_{k=m} + \ldots + \underbrace{\alpha}_{k=n} = \left(n - m \boxed{+1}\right) \times \alpha.$$

Plus généralement, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de réels indexée par un ensemble **FINI** I, la somme de tous les x_i, i décrivant I, est notée $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i$. Par exemple : $\displaystyle\sum_{i \in \{1,4,9\}} x_i = x_1 + x_4 + x_9$, et par *convention des sommes vides* : $\displaystyle\sum_{i \in \varnothing} x_i = 0$.

À présent, quelles lettres $n, k, i\ldots$ a-t-on le droit d'utiliser en indice quand on veut écrire une somme sous la forme d'un $\sum$? C'est simple, on l'écrit in extenso, on regarde quelles variables apparaissent et on choisit pour indice du symbole $\sum$ **N'IMPORTE QUELLE AUTRE LETTRE**. Par exemple, pour $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$, on peut choisir n'importe quelle lettre : $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$, tandis que pour $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, la lettre n doit absolument être écartée car elle a déjà une signification dans la somme : $\displaystyle\cancel{\sum_{n=1}^{n} n^2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$.

Autre question. Quand plusieurs sommes apparaissent dans un même calcul, doit-on leur attribuer des indices différents ? Que penser par exemple des relations suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$? Les deux sont convenables et racontent en dépit des apparences la même histoire in extenso :

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

L'indice d'une somme a en réalité une zone d'influence très restreinte comme l'indique la figure ci-contre. Un indice « mort » peut être recyclé à volonté. La seule chose qu'il faut éviter, c'est la schizophrénie, le fait qu'une même lettre possède plusieurs significations au même instant.

$$\ldots\text{bla bla bla} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{bla bla bla}\ldots$$

Naissance de k

Mort de k — courte vie que la vie d'un indice !

Nous aurons souvent l'occasion de « sommer jusqu'à l'infini » cette année. C'est autorisé quand, à l'issue d'un calcul sur une somme finie, on observe que le résultat obtenu converge.

Définition (Sommes infinies) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

4.2 Simplifications télescopiques

Nous rencontrerons beaucoup de *sommes télescopiques* $\sum_{k=m}^{n}(x_{k+1}-x_k)$ cette année, très faciles à simplifier.

$$\sum_{k=m}^{n}(x_{k+1}-x_k) = (x_{n+1}\underbrace{-x_n)+(x_n}_{\text{Simplification}}\underbrace{-x_{n-1})+(x_{n-1}}_{\text{Simplification}}-x_{n-2})+\ldots+(x_{m+2}\underbrace{-x_{m+1})+(x_{m+1}}_{\text{Simplification}}-x_m) = x_{n+1}-x_m.$$

Théorème (Simplification télescopique) Pour tous $x_m,\ldots,x_{n+1}\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_m.$

En résumé, pour comparer x_m et x_{n+1}, il suffit de savoir comparer les termes voisins consécutifs x_k et x_{k+1} pour tout $k\in[\![m,n]\!]$, puis de sommer. La formule s'utilise ainsi souvent en sens inverse sous la forme : $\displaystyle x_n = x_m+\sum_{k=m}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$.

Exemple $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\sum_{p=1}^{n}\Big(\ln(p+1)-\ln p\Big)=\ln(n+1).$

Exemple La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ vaut à la fois $1-\dfrac{1}{n+1}$ par télescopage et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ par mise au même dénominateur, donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$ Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$

4.3 Changements d'indice

Une somme peut toujours être écrite de différentes manières selon le choix qu'on fait de la lettre en indice. Le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice* et deux exemples vaudront mieux qu'un long discours.

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{p=0}^{n-1}x_{p+1}$$

Changement d'indice $k=p+1$

k	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
p	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

$$\sum_{k=0}^{n}x_k=x_0+x_1+\ldots+x_n=\sum_{p=0}^{n}x_{n-p}$$

Changement d'indice $k=n-p$

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
p	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0

Parfois, nous ferons des changements d'indice plus compliqués. Ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale — on a juste changé le nom des termes sans changer leur valeur.

4.4 Sommes doubles

L'ensemble des indices d'une somme est parfois un ensemble de couples. Calculer la somme revient dans ce cas à additionner les termes d'un tableau à deux entrées. Pour $I=[\![0,m]\!]\times[\![1,n]\!]$, la somme $\sum_{i\in I}x_i$ est alors plutôt notée $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}x_{ij}$.

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n
0	x_{01}	x_{02}	$\cdots$	x_{0n}
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

Les *sommes doubles* de ce genre sont très courantes. Par exemple, quand on multiplie une somme de m termes et une somme de n termes, on obtient en développant une somme de mn termes qu'on peut écrire avec un seul $\sum$.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\times\sum_{j=1}^{n}b_j=(a_1+\ldots+a_m)(b_1+\ldots+b_n)=a_1b_1+a_1b_2+\ldots+a_mb_{n-1}+a_mb_n=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}a_ib_j.$$

Théorème (Produit de deux $\sum$) Pour tous $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j$.

Observons à présent que la somme des termes d'un tableau à deux entrées peut être calculée en sommant par paquets d'abord sur les lignes, ou bien d'abord sur les colonnes.

Somme des termes d'un tableau carré : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_{ij}$, aussi notée $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n	
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{1j}$
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{nj}$
	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{i1}$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{i2}$	$\cdots$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{in}$	

Lignes : $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}$ — Colonnes : $\displaystyle\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_{ij}$

Somme des termes d'un tableau triangulaire avec diagonale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n	
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{1j}$
2		x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=2}^n x_{2j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				x_{nn}	$\rightarrow \displaystyle\sum_{j=n}^n x_{nj}$
	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^1 x_{i1}$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^2 x_{i2}$	$\cdots$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{in}$	

Lignes : $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n x_{ij}$ — Colonnes : $\displaystyle\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j x_{ij}$

On traite de même le cas des sommes $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij}$ à l'aide de tableaux triangulaires sans diagonale.

Théorème (Permutation des $\sum$) Pour toute famille $(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de réels :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_{ij}, \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{ij} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j x_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n x_{ij}, \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij} = \sum_{j=2}^n\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n x_{ij}.$$

Nous calculerons souvent des sommes doubles cette année.

Quand on ne sait pas quoi faire de deux sommes emboîtées, on les permute pour voir ce qui se passe !

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On ne voit pas trop comment on pourrait simplifier la somme $\displaystyle\sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Il est en revanche facile de simplifier la somme de ces sommes.

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\sum_{i=1}^j 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times j = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Les sommes $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij}$ surgissent naturellement quand on calcule le carré d'une somme. Le calcul suivant repose essentiellement sur l'idée que le tableau ci-contre est symétrique par rapport à sa diagonale.

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i \times \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j = \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i<j}} x_i x_j}^{\text{Termes au-dessus de la diagonale}} + \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i=j}} x_i x_j}^{\text{Termes diagonaux}} + \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i>j}} x_i x_j}^{\text{Termes sous la diagonale}}$$
$$= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n
1	x_1^2	x_1x_2	$\cdots$	x_1x_n
2	x_2x_1	x_2^2	$\cdots$	x_2x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	x_nx_1	x_nx_2	$\cdots$	x_n^2

Par exemple : $(a+b)^2 = \left(a^2+b^2\right)+2ab$ et $(a+b+c)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+ac+bc)$.

Théorème (Carré d'un $\sum$) Pour tous $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \overbrace{2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j}^{\text{Doubles produits}}.$$

4.5 Quelques sommes classiques

Théorème (Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration

- **Calcul de $S = \sum_{k=0}^{n} k$:** Calculons de deux manières la somme des termes du tableau suivant :

0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	$\rightarrow S$
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0	$\rightarrow S$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	
n	n	n		n	n	$\} \ n(n+1)$

$\left.\begin{matrix} S \\ S \end{matrix}\right\} 2S$

Conclusion : $2S = n(n+1)$, i.e. $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut présenter la même idée à l'aide d'un changement d'indice en renversant l'ordre de lecture de la somme S : $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} k \overset{i=n-k}{=} \sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1) - S$, donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^2$:** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, après développement : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Sommons maintenant ces identités. Cela donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^3 - k^3\Big) = \sum_{k=0}^{n} \big(3k^2 + 3k + 1\big), \qquad \text{donc } (n+1)^3 - 0^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

après simplification télescopique. Enfin :

$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 3\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^3 - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{n+1}{2}\big(2(n+1)^2 - 3n - 2\big)$$
$$= \frac{n+1}{2}\big(2n^2 + n\big) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 3.

Théorème (Sommes géométriques) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} \underbrace{x^m}_{\text{Premier terme}} \times \dfrac{x^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En outre, si $|x| < 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Démonstration Si $x = 1$, alorsd $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$. Dans le cas contraire :

$$(x-1)\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=m}^{n} \big(x^{k+1} - x^k\big) = x^{n+1} - x^m, \qquad \text{donc } \sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x^m}{x - 1} = x^m \times \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1}.$$

Pour finir, si $|x| < 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-x}$.

La formule $a^n - b^n$ suivante n'est jamais qu'une généralisation de la formule des sommes géométriques.

Théorème (Formule $a^n - b^n$) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = (a-b)\Big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\Big).$$

Dans la somme, les puissances de a diminuent à mesure que les puissances de b augmentent. Pour $n = 2$, le résultat est connu : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, pour $n = 3$: $a^3 - b^3 = (a-b)\big(a^2 + ab + b^2\big)$, et enfin pour $n = 4$: $a^4 - b^4 = (a-b)\big(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\big)$.

Démonstration $\displaystyle (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\Big) = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$

Définition-théorème (Un double point de vue sur les racines d'un polynôme) Soient $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\lambda) = 0$.

(ii) Il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On dit dans ce cas que λ est une *racine de* P.

Démonstration Notons $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients de P, de sorte que $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Réciproquement, faisons l'hypothèse que $P(\lambda) = 0$. Aussitôt, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = P(x) - P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-\lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} x^i = (x-\lambda) \sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} a_k \lambda^{k-i-1} x^i$$

$$= (x-\lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k \lambda^{k-i-1} \right) x^i = (x-\lambda)Q(x) \qquad \text{si on pose } Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k \lambda^{k-i-1} \right) x^i.$$

La fonction Q ainsi dénichée est bien polynomiale, c'est fini !

4.6 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}, \qquad \text{ou encore :} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right).$$

Démonstration Posons $X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$ et $Z = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. On souhaite montrer que $|Z| \leqslant \sqrt{X}\sqrt{Y}$.

- Si $x_1 = \ldots = x_n = 0$, alors $X = Z = 0$, donc $|Z| = 0 \leqslant 0 = \sqrt{X}\sqrt{Y}$.
- Supposons au contraire que l'un des réels $x_1, \ldots, x_n$ est non nul, de sorte que $X > 0$, et notons S la fonction $t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} (x_k t + y_k)^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 t^2 + 2x_k y_k t + y_k^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) t + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = Xt^2 + 2Zt + Y,$$
donc S est une fonction polynomiale de degré 2 — EXACTEMENT 2 car $X \neq 0$. Par ailleurs, S est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier car une somme de carrés de réels est toujours positive, donc S possède 0 ou 1 racine réelle, mais pas plus. Il en découle que son discriminant $(2Z)^2 - 4XY = 4\left(Z^2 - XY\right)$ est négatif, i.e. que $Z^2 \leqslant XY$. Enfin, par croissance de la racine carrée : $|Z| = \sqrt{Z^2} \leqslant \sqrt{XY} = \sqrt{X}\sqrt{Y}$.

Exemple Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Démonstration D'après l'inégalité de Cauch-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

5 Produits

Nous passerons plus vite sur les produits que sur les sommes, car c'est pareil ! Pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de réels indexée par un ensemble FINI I, le produit de tous les nombres x_i, i décrivant I, est noté $\prod_{i \in I} x_i$.

Cette fois-ci, par *convention des produits vides* : $\prod_{i \in \varnothing} x_i = 1$.

Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\prod_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha \times \alpha \times \ldots \times \alpha}_{n-m+1 \text{ termes}} = \alpha^{n-m+1}$.

Définition (Factorielle) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* ou *n factorielle* l'entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
Par convention : $0! = 1$. **Relation de récurrence :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! = n \times (n-1)!$.

Exemple $n^n = \prod_{k=1}^{n} n = \overbrace{n \times n \times \ldots \times n}^{n \text{ termes}}$. Ne pas confondre avec $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Exemple $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{n! \times (n+1)(n+2)}{n!} = (n+1)(n+2)$.

Attention ! $(2n)! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)$.
Rien à voir avec $2 \times n! = 2 \times \big(1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n\big)$, ni avec $2^n \times n! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2) \times (2n)$.

Théorème (Simplification télescopique) Pour tous $x_m, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^*$: $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m}$.

Théorème (Permutation des $\prod$) Pour toute famille $(x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de réels :

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} x_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} x_{ij}, \qquad \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} x_{ij} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} x_{ij}, \qquad \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_{ij} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} x_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} x_{ij}.$$

Exemple

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} (ij^2) = \prod_{i=1}^{n} \left(i^n \left(\prod_{j=1}^{n} j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(i^n n!^2 \right) = \left(\prod_{i=1}^{n} i \right)^n (n!)^{2n} = (n!)^n \times (n!)^{2n} = (n!)^{3n}.$$

$1^2 i \times 2^2 i \times \ldots \times n^2 i = i^n \times \big(1 \times 2 \times \ldots \times n\big)^2$

$1^n n!^2 \times 2^n n!^2 \times \ldots \times n^n n!^2 = \big(1 \times 2 \times \ldots \times n\big)^n \times (n!)^{2n}$

6 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Définition-théorème (Coefficients binomiaux) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
On appelle (*coefficient binomial*) *k parmi n* et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de cardinal k de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ si $n \in \mathbb{N}^*$ — ou de l'ensemble $\varnothing$ si $n = 0$.

— Évidemment, $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.

— Si au contraire $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

En particulier : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1				*Triangle*		
1	1	1			*de Pascal*		
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Plus généralement, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de cardinal k de tout ensemble de cardinal n, pas forcément $[\![1,n]\!]$.

Démonstration Faisons l'hypothèse que $k \in [\![0,n]\!]$ et montrons que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Intéressons-nous pour cela aux familles de k éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

— Pour construire une famille quelconque $(x_1, \ldots, x_k)$ de k éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, on peut commencer par choisir x_1 (n possibilités), puis x_2 ($n-1$ possibilités maintenant que x_1 est choisi), puis x_3 (plus que $n-2$ possibilités)... et enfin x_k ($n-k+1$ possibilités). Il existe ainsi $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ familles de k éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

— Pour construire une telle famille, on peut aussi procéder autrement, choisir d'abord une partie de cardinal k de $[\![1,n]\!]$ ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis ordonner cette partie pour en faire une famille $(x_1,\ldots,x_k)$ (k possibilités pour le choix de x_1, puis $k-1$ pour x_2... donc $k!$ possibilités en tout). Il existe ainsi $\binom{n}{k}k!$ famille de k éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

Conclusion : $\displaystyle\binom{n}{k}k! = \frac{n!}{(n-k)!}$. ■

Cette démonstration est un exemple de *preuve par double comptage*. Pour prouver une relation $a=b$, on compte de deux façons les objets d'un certain ensemble fini E. Le premier dénombrement montre que E contient a éléments et le deuxième que E en contient b, donc $a=b$.

Théorème (Propriétés des coefficients binomiaux) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

(i) **Symétrie :** $\displaystyle\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

(ii) **Formule de Pascal :** $\displaystyle\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

(iii) **Formule du capitaine :** Pour n et k non nuls : $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Symétrie

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration Les assertions (i) et (ii) sont triviales dans le cas $k<0$, le cas $k>n$ et le cas $n=0$. Supposons désormais $n\geqslant 1$ et k compris entre 0 et n.

(i) On connaît tout d'une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k quand on connaît son complémentaire. Il y a donc dans $[\![1,n]\!]$ autant de parties de cardinal k que de parties de cardinal $n-k$.

(ii) Intéressons-nous aux parties de cardinal $k+1$ de $[\![1,n+1]\!]$. Il en existe $\binom{n+1}{k+1}$ par définition des coefficients binomiaux, mais nous pouvons les dénombrer autrement en distinguant celles qui contiennent $n+1$ de celles qui ne le contiennent pas. L'entier $\binom{n+1}{k+1}$ sera ainsi la somme des deux cardinaux obtenus.

— Il y a autant de parties de cardinal $k+1$ de $[\![1,n+1]\!]$ qui contiennent $n+1$ que de parties de cardinal k de $[\![1,n]\!]$, à savoir $\binom{n}{k}$. On passe en effet simplement des unes aux autres en ajoutant ou en ôtant l'élément $n+1$.

— Les parties de cardinal $k+1$ de $[\![1,n+1]\!]$ qui ne contiennent pas $n+1$ sont exactement les parties de cardinal $k+1$ de $[\![1,n]\!]$ et il en existe $\binom{n}{k+1}$.

(iii) De combien de manières peut-on former une équipe de k entiers de $[\![1,n]\!]$ dont un entier-capitaine ? Procédons par double comptage.

— On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis désigner le capitaine après coup parmi eux (k possibilités). On crée ainsi $\binom{n}{k}\times k$ équipes.

— On peut procéder autrement et choisir d'abord le capitaine (n possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les $k-1$ autres membres ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités). On crée cette fois $n\times\binom{n-1}{k-1}$ équipes. ■

Théorème (Formule du binôme) Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $a,b\in\mathbb{R}$: $\displaystyle(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

Pour $n \in \{2,3,4,5\}$: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ et $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

✖ **Attention !** Maudits soient celles et ceux qui confondent la formule du binôme avec la formule $a^n - b^n$! Dans la formule du binôme, il y a des coefficients binomiaux.

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Par récurrence sur n.

Initialisation : $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{HDR}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = a\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^l b^{n-l} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^{l+1}b^{n-l} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}}_{\text{Changement d'indice } k=l+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \qquad \text{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{\text{Formule de Pascal}} a^k b^{(n+1)-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k}.
\end{aligned}$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

et : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$