DÉTERMINANTS

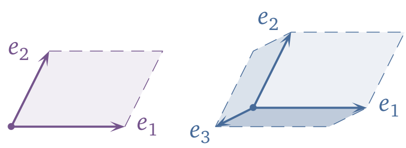
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel non nul. Les résultats présentés, sauf un ou deux, demeurent vrais dans un contexte plus général, mais nous ne nous en préoccuperons pas ici.

1 AIRES ET VOLUMES ORIENTÉS RELATIVEMENT À UNE BASE

Il est difficile de définir proprement les notions d'aire dans le plan et de volume dans l'espace. Nous n'y arriverons pas pour des surfaces ou des volumes quelconques, mais ce que nous allons faire n'est pas rien. Point de départ de nos investigations : la donnée d'une « unité d'aire orientée » dans le plan et d'une « unité de volume orienté » dans l'espace.

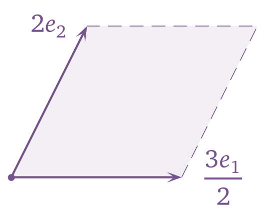
— Une unité d'aire orientée dans le plan, ce sera pour nous un parallélogramme orienté, i.e. une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ du plan décrétée directe.

— Une unité de volume orienté dans l'espace, ce sera pour nous un parallélépipède orienté, i.e. une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace décrétée directe.

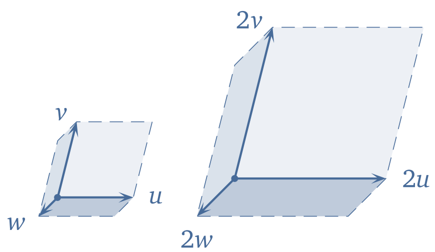


À partir de cette brique élémentaire, nous pouvons donner une aire (resp. un volume) à n'importe quel parallélogramme (resp. parallélépipède) du plan (resp. de l'espace). Nous noterons $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ l'aire orientée du parallélogramme engendré par une famille (x_1, x_2) de vecteurs dans le plan et $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3)$ le volume orienté du parallélépipède engendré par une famille (x_1, x_2, x_3) de vecteurs de l'espace. L'indice « $\mathscr{B}$ » indique que ces aires/volumes orientés sont calculés relativement à l'unité d'aire/volume orienté que $\mathscr{B}$ représente en tant que brique élémentaire. En particulier : $\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1.}$

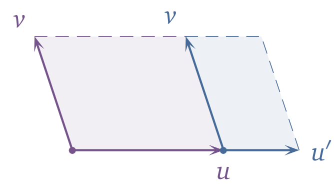
Quant à l'orientation d'une aire dans le plan, que signifie-t-elle ? Simplement qu'on comptera positivement l'aire d'un parallélogramme engendré par une base directe et négativement l'aire d'un parallélogramme engendré par une base indirecte. Même principe pour les volumes orientés. Par exemple, dans le plan : $\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = -1$ car la base (e_2, e_1) est indirecte.



$$\det_{\mathscr{B}}\left(2e_2, \frac{3e_1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} \det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -3\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = -3$$



$$\det_{\mathscr{B}}(2u, 2v, 2w) = 2^3 \det_{\mathscr{B}}(u, v, w)$$



$$\det_{\mathscr{B}}(u + u', v) = \det_{\mathscr{B}}(u, v) + \det_{\mathscr{B}}(u', v)$$

Ces figures nous permettent de comprendre quelques propriétés des aires et des volumes orientés. Plus précisément :

— **Caractérisation des bases :**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (u, v) \text{ est une base du plan} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u, v) \neq 0. \\ (u, v, w) \text{ est une base de l'espace} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \neq 0. \end{array}}$$

En d'autres termes, la colinéarité de deux vecteurs est caractérisée dans le plan par le caractère aplati du parallélogramme qu'ils engendrent. Même principe dans l'espace.

En particulier, dans le plan : $\det_{\mathscr{B}}(u, u) = 0$ et dans l'espace, dès que deux des trois vecteurs u, v et w sont égaux : $\det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = 0$ — c'est ce qu'on appelle le caractère *alterné* de l'application $\det_{\mathscr{B}}$.

— **Antisymétrie :** $\boxed{\text{Le signe de } \det_{\mathscr{B}}(u, v) \text{ et } \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \text{ est changé chaque fois qu'on permute deux vecteurs.}}$

— **Multilinéarité :** $\boxed{\text{L'application } \det_{\mathscr{B}} \text{ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.}}$

— **Caractérisation de l'orientation :**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (u, v) \text{ est une base directe du plan} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u, v) > 0. \\ (u, v, w) \text{ est une base directe de l'espace} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) > 0. \end{array}}$$

2 Formes multilinéaires alternées

Nous allons dans ce paragraphe tâcher de prendre de la hauteur par rapport au précédent en abandonnant le strict point de vue d'une géométrie du plan et de l'espace. Par quoi les notions d'aire et volume orientés pourraient-elles bien être remplacées en dimension finie quelconque ?

Définition (Application multilinéaire) Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *n-linéaire* si :

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots \times E_n$ fixé, l'application $x \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ est linéaire de E_k dans F.

On dit que f est *bilinéaire* si $n = 2$, *trilinéaire* si $n = 3$, et si $F = \mathbb{K}$, que f est une *forme n-linéaire*.

En résumé, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f est linéaire par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable quand on fixe les $n-1$ variables restantes. Bien sûr, une application 1-linéaire n'est rien d'autre qu'une application linéaire.

Exemple

- Dans l'espace, le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est bilinéaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
- Le produit matriciel $(A, B) \longmapsto AB$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
- Le produit fonctionnel $(f, g) \longmapsto fg$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Pour tous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, E' et E'', la composition $(f, g) \longmapsto g \circ f$ est bilinéaire de $\mathscr{L}(E, E') \times \mathscr{L}(E', E'')$ dans $\mathscr{L}(E, E'')$.

Définition (Forme multilinéaire alternée) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. On dit que f est *alternée* si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Théorème (Propriétés des formes multilinéaires alternées) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire alternée de E^n.

(i) f est nulle sur toute famille liée.

(ii) On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.

(iii) f est *antisymétrique* — cela revient à dire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $i < j$:

$$f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) = -f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots).$$

Démonstration

(i) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée de E, avec disons $x_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$ pour un certain $k \in [\![1, n]\!]$ et pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\ldots, x_{k-1}, \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i, x_{k+1}, \ldots\right) \underset{k^{\text{ème}}\text{ variable}}{\overset{\text{Linéarité}}{=}} \sum_{i \neq k} \lambda_i \overbrace{f(\ldots, x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \ldots)}^{x_i \text{ apparaît deux fois}} = 0.$$

(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Seule la $k^{\text{ème}}$ variable est explicitée ci-après :

$$f\left(\ldots, x_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i, \ldots\right) \underset{k^{\text{ème}}\text{ variable}}{\overset{\text{Linéarité}}{=}} f(\ldots, x_k, \ldots) + \sum_{i \neq k} \lambda_i \underbrace{f(\ldots, x_i, \ldots)}_{\substack{x_i \text{ apparaît} \\ \text{deux fois}}} = f(\ldots, x_k, \ldots).$$

(iii) Seules les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables sont explicitées ci-après. Par n-linéarité et caractère alterné de f :

$$\underbrace{f(\ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots)}_{=0} = \underbrace{f(\ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots)}_{=0} + f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) + f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) + \underbrace{f(\ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots)}_{=0},$$

donc en effet $f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) = -f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$.

À présent, afin de généraliser les notions d'aire orientée dans le plan et de volume orienté dans l'espace, nous allons tâcher de déterminer toutes les formes $\boxed{n}$-linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $\boxed{n}$.

Soient donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f une forme n-linéaire alternée de E^n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$. Par n-linéarité de f :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} e_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n} e_{k_n}\right) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in[\![1,n]\!]^n} a_{k_1 1} \ldots a_{k_n n} f\left(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}\right).$$

Dans cette somme, $f\left(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}\right) = 0$ dès que deux des vecteurs e_{k_i} sont égaux, donc nous pouvons n'y conserver que les n-listes $(k_1, \ldots, k_n)$ d'éléments **DISTINCTS**, i.e. les n-arrangements de $[\![1,n]\!]$. Or la donnée d'un n-arrangement $(k_1, \ldots, k_n)$ de $[\![1,n]\!]$ est équivalente à la donnée d'une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ avec $\sigma(i) = k_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Finalement :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}\right) f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right),$$

où l'on rappelle que S_n désigne le groupe symétrique de $[\![1,n]\!]$, i.e. l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. Pour aller plus loin, nous allons devoir étudier davantage les quantités $f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right)$ qui viennent d'apparaître. Donnons-en deux exemples dans le cas $n = 4$. L'outil majeur des calculs qui suivent, c'est l'**ANTISYMÉTRIE** de f.

— Si σ est définie par les relations : $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$, alors :
$$f\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}\right) = f(e_3, e_4, e_1, e_2) \overset{e_1 \leftrightarrow e_3}{=} -f(e_1, e_4, e_3, e_2) \overset{e_2 \leftrightarrow e_4}{=} \boxed{+} f(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

— Si σ est définie par les relations : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$, alors :
$$f\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}\right) = f(e_2, e_4, e_1, e_3) \overset{e_1 \leftrightarrow e_2}{=} -f(e_1, e_4, e_2, e_3) \overset{e_2 \leftrightarrow e_4}{=} f(e_1, e_2, e_4, e_3) \overset{e_3 \leftrightarrow e_4}{=} \boxed{-} f(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

Deux questions s'imposent après ces exemples. D'abord, peut-on « défaire » **TOUTE** permutation par des échanges successifs de deux valeurs ? Nous savons que oui, car S_n est engendré par ses transpositions. Que dire ensuite des signes « + » et « − » que les calculs précédents mettent en évidence ? Nous allons voir qu'ils sont liés au morphisme signature du chapitre « Structure de groupe et d'anneau ». Petit rafraîchissement de mémoire. . .

Définition-théorème (Signature)

- **Signature :** Il existe un et un seul morphisme de groupes ε de S_n dans $\{-1, 1\}$, appelée *signature*, qui donne à toute transposition la valeur -1.

  En particulier, donc : $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$ pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$.
- **Signature d'un cycle :** Soit $p \in [\![2,n]\!]$. La signature d'un p-cycle de $[\![1,n]\!]$ est $(-1)^{p-1}$.
- **Permutations paire/impaire :** Pour tout $\sigma \in S_n$, on dit que σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et *impaire* si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Théorème (Caractérisation des formes multilinéaires alternées par la signature) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n.

f est alternée si et seulement si pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\sigma \in S_n$: $f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$.

Démonstration

- Faisons l'hypothèse que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\sigma \in S_n$: $f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$. Soit alors $x_1, \ldots, x_n \in E$. On suppose que $x_i = x_j$ pour certains $i, j \in [\![1,n]\!]$ pour lesquels $i < j$ et on note τ la transposition $(i\ j)$. Dans ces conditions :
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots) = f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}\right) = \varepsilon(\tau) f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n).$$
  Conclusion : $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, et donc f est alternée.
- Réciproquement, supposons f alternée. Comme S_n est engendré par ses transpositions et comme la signature d'un produit de p transpositions vaut $(-1)^p$, il nous suffit d'établir le résultat dans le seul cas où σ est une transposition. Or nous l'avons déjà fait, c'est la propriété d'antisymétrie de f.

Ce résultat nous permet de conclure le calcul savant que nous avons amorcé plus haut. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f une forme n-linéaire alternée de E^n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et enfin $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$, alors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}\right) f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}\right) f(e_1, \ldots, e_n).$$

3 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition-théorème (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Pour toute famille $\mathscr{X}$ de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$, on appelle *déterminant de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{B}$* le scalaire :
$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}.$$
L'application $\det_{\mathscr{B}}$ ainsi définie sur E^n est une forme n-linéaire alternée de E^n et : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Attention ! Seul le déterminant d'une famille de $\boxed{n}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $\boxed{n}$ est ainsi défini.

Démonstration

- **Multilinéarité :** Vous la démontrerez seuls si vous voulez vous en convaincre.
- **Caractère alterné :** Soient $x_1,\dots,x_n \in E$ et $\varphi \in S_n$. Dans le calcul suivant, on effectue le changement d'indice $j = \varphi(i)$ associé à la bijection φ, puis le changement d'indice $\theta = \sigma\varphi^{-1}$ associé à la bijection $\sigma \longmapsto \sigma\varphi^{-1}$ de S_n sur lui-même.
$$\det_{\mathscr{B}}\big(x_{\varphi(1)},\dots,x_{\varphi(n)}\big) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)\varphi(i)} \overset{j=\varphi(i)}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma\varphi^{-1}(j)j} \overset{\theta=\sigma\varphi^{-1}}{=} \sum_{\theta\in S_n} \varepsilon(\theta\varphi) \prod_{j=1}^n a_{\theta(j)j}$$
$$= \sum_{\theta\in S_n} \varepsilon(\theta)\varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^n a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi) \sum_{\theta\in S_n} \varepsilon(\theta) \prod_{i=1}^n a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi)\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n).$$
- **Calcul de $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})$:** La matrice B de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ est I_n, donc pour tout $\sigma \in S_n$ distinct de l'identité : $\displaystyle\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} = 0$. Conclusion : $\displaystyle\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^n b_{\mathrm{Id}(i)i} = 1.$

Théorème (Toute forme multilinéaire alternée est un multiple du déterminant dans une base donnée) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et f une forme n-alternée de E^n. Alors $f = f(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration Résultat déjà prouvé : $\displaystyle f(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}\right) f(e_1,\dots,e_n).$

Théorème (Déterminants en dimensions 2 et 3)

(i) **Dimension 2 :** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathscr{B}$ et $x,y \in E$ de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans $\mathscr{B}$. Alors :
$$\det_{\mathscr{B}}(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \text{quantité que l'on note aussi } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

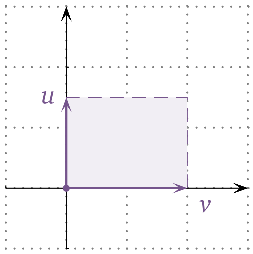
(ii) **Dimension 3 :** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathscr{B}$ et $x,y,z \in E$ de coordonnées respectives (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) et (z_1,z_2,z_3) dans $\mathscr{B}$. Alors :
$$\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 \qquad (\textit{règle de Sarrus}),$$
quantité que l'on note aussi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Démonstration

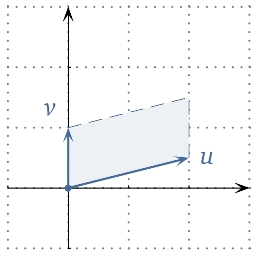
(i) $\displaystyle\det_{\mathscr{B}}(x,y) = \sum_{\sigma\in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}$, or $S_2 = \big\{\mathrm{Id}, (1\ 2)\big\}$, donc $\det_{\mathscr{B}}(x,y) = \underbrace{x_1y_2}_{\mathrm{Id}} - \underbrace{x_2y_1}_{(1\ 2)}$.

(ii) $\displaystyle\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}z_{\sigma(3)}$, or $S_3 = \big\{\mathrm{Id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\big\}$, donc :
$$\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \underbrace{x_1y_2z_3}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{x_2y_3z_1}_{(1\ 2\ 3)} + \underbrace{x_3y_1z_2}_{(1\ 3\ 2)} - \underbrace{x_3y_2z_1}_{(1\ 3)} - \underbrace{x_2y_1z_3}_{(1\ 2)} - \underbrace{x_1y_3z_2}_{(2\ 3)}.$$

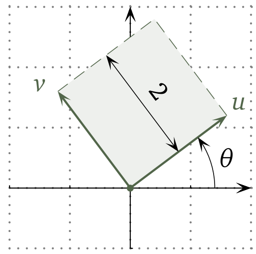
Nous avons motivé l'introduction des déterminants par les notions d'aire orientée en dimension 2 et de volume orienté en dimension 3. La notion abstraite de déterminant que nous venons d'introduire est-elle a posteriori satisfaisante ? Notons $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le petit carré élémentaire que $\mathscr{B}_2$ engendre est à nos yeux, dans le monde physique, d'aire orientée 1. Nous nous attendons donc à ce que l'application $\det_{\mathscr{B}_2}$ soit une mesure de l'aire orientée des parallélogrammes au sens le plus intuitif du terme. Les figures ci-dessous sont particulièrement convaincantes. Rappelons au passage que l'aire d'un parallélogramme peut être calculée selon le principe « base × hauteur » — et au pire, vous pouvez toujours utiliser les petits carreaux du grillage !



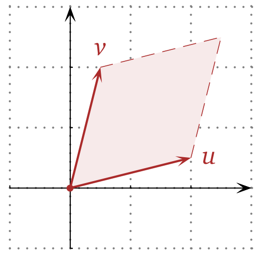
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -3$



$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2$



$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 4$



$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{15}{4}$

Théorème (Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{X}$ une famille de n vecteurs de E.

(i) **Formule de changement de base :** $\quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{X})$.

(ii) **Caractérisation des bases :** $\mathscr{X}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) \neq 0$.

$$\text{Dans ce cas :} \quad \det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B}) = \frac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})}.$$

Démonstration

(i) L'application $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, donc de la forme $\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}$ d'après un théorème précédent. Pour conclure, évaluer en $\mathscr{X}$.

(ii) Si $\mathscr{X}$ est une base de E, alors d'après (i) : $\quad 1 = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B})$, $\quad$ donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ est non nul d'inverse $\det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B})$.

Réciproquement, par contraposition, si $\mathscr{X}$ n'est pas une base de E, alors $\mathscr{X}$ est liée — car de cardinal n en dimension n. Or $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = 0$.

✖ **Attention !** Dans la définition qui suit, on travaille seulement avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition-théorème (Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On définit sur l'ensemble des bases de E une relation « *avoir la même orientation que* » de la façon suivante — pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E :

$$\mathscr{B}' \text{ a la même orientation que } \mathscr{B} \text{ si et seulement si } \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence. Il existe exactement deux orientations possibles — si $\mathscr{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$, alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même orientation.

Orienter E, c'est par définition décréter arbitrairement qu'une certaine base fixée $\mathscr{B}$ de E est *directe*. Toutes les bases de E de même orientation que $\mathscr{B}$ sont alors aussi qualifiées de *directes* et les autres d'*indirectes*.

Par exemple, on dit que $\mathbb{R}^n$ est *muni de son orientation canonique* quand sa base canonique est considérée directe.

Jusqu'ici, personne n'a pu vous définir proprement le concept d'orientation — et pour cause, c'est compliqué. À présent, l'orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel repose sur l'idée que ses bases sont de deux sortes et que le choix d'une orientation est totalement arbitraire — certaines sont dites « directes » et les autres « indirectes ». Cet arbitraire n'est pas vraiment surprenant cela dit, vous n'appréciez pas l'orientation d'un plan de la même façon selon que vous vous placez au-dessus ou au-dessous de lui — les bases qui paraissent directes d'un côté paraissent indirectes de l'autre. La notion d'orientation ne s'en trouve pas ruinée car l'essentiel c'est ceci — deux bases qui ont la même orientation quand on regarde le plan d'en haut ont aussi la même orientation quand on le regarde d'en bas.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

- **Réflexivité :** $\quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 > 0$.
- **Symétrie :** Si $\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$: $\quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0 \quad$ donc $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')} > 0$, et ainsi $\mathscr{B}$ a bien la même orientation que $\mathscr{B}'$.

- **Transitivité :** Si $\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$ et si $\mathscr{B}''$ a la même que $\mathscr{B}'$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') > 0$, donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') > 0$, et ainsi $\mathscr{B}''$ a la même orientation que $\mathscr{B}$.
- **Exactement deux orientations :** Il s'agit de montrer que si $\mathscr{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$, alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même. Dans ce contexte : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$ et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') < 0$, donc $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \dfrac{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')} > 0$, et ainsi $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même orientation. ■

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Définition et premières propriétés

Définition (Déterminant d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de A* le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{[n]}$.

Par définition, donc : $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$.

Attention ! Seul le déterminant d'une matrice CARRÉE est ainsi défini.

Exemple $\det(I_n) = \det_{\mathscr{B}_n}\big(\mathscr{B}_n\big) = 1$ si on note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Théorème (Lien entre le déterminant d'une matrice carrée et celui d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{X}$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\big)$.

Démonstration Évident, les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ sont exactement les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{B}$ et les déterminants sont définis par la même formule. ■

Théorème (Premières propriétés du déterminant d'une matrice carrée) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Multilinéarité par rapport aux colonnes :** L'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes de A.

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Attention !

(ii) **Déterminant d'un produit :** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iii) **Caractérisation de l'inversibilité :** A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

En outre, dans ce cas : $\det\big(A^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(iv) **Invariance par similitude :** Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant.

(v) **Invariance par transposition :** $\det\big(A^\top\big) = \det(A)$.

A fortiori, l'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est également n-linéaire par rapport aux lignes de A.

En particulier, d'après (ii) et (iii), det est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

L'invariance du déterminant par transposition signifie que dans l'expression $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$, on peut si on le souhaite remplacer $a_{\sigma(i)i}$ par $a_{i\sigma(i)}$, c'est indolore.

Attention ! Le déterminant n'est pas linéaire. En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda A + \mu B) \cancel{=} \lambda\det(A) + \mu\det(B)$.

Démonstration

(i) Tout simplement, si on note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'application $\det_{\mathscr{B}_n}$ est n-linéaire.

(ii) Notons $A_1,\dots,A_n$ les colonnes de A, $B_1,\dots,B_n$ celles de B, $\mathscr{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et φ l'application $(C_1,\dots,C_n)\longmapsto \det_{\mathscr{B}_n}\big(AC_1,\dots,AC_n\big)$ de $\big(\mathbb{K}^n\big)^n$ dans $\mathbb{K}$.

- **Multilinéarité :** Pour tous $k\in[\![1,n]\!]$, $C_k,C_k'\in\mathbb{K}^n$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ — les autres variables étant fixées :
$$\begin{aligned}\varphi\big(\dots,\lambda C_k+C_k',\dots\big)&=\det_{\mathscr{B}_n}\big(\dots,A(\lambda C_k+C_k'),\dots\big)=\det_{\mathscr{B}_n}\big(\dots,\lambda AC_k+AC_k',\dots\big)\\&=\lambda\det_{\mathscr{B}_n}\big(\dots,AC_k,\dots\big)+\det_{\mathscr{B}_n}\big(\dots,AC_k',\dots\big)=\lambda\varphi\big(\dots,C_k,\dots\big)+\varphi\big(\dots,C_k',\dots\big).\end{aligned}$$
- **Caractère alterné :** Si deux des colonnes $C_1,\dots,C_n$ au moins sont égales, alors $\varphi(C_1,\dots,C_n)=0$ puisque $\det_{\mathscr{B}_n}$ est alterné.

Conclusion : $\quad\varphi=\varphi\big(\mathscr{B}_n\big)\det_{\mathscr{B}_n}=\det_{\mathscr{B}_n}(A_1,\dots,A_n)\det_{\mathscr{B}_n}=\det(A)\det_{\mathscr{B}_n},\quad$ donc :
$$\det(AB)=\det_{\mathscr{B}_n}\big(AB_1,\dots,AB_n\big)=\varphi(B_1,\dots,B_n)=\det(A)\det_{\mathscr{B}_n}(B_1,\dots,B_n)=\det(A)\det(B).$$

(iii) Pour les familles de vecteurs, le résultat a été démontré dans les paragraphes précédents, or la matrice A est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est une base de $\mathbb{K}^n$.

(iv) Pour tous $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, d'après (ii) et (iii) : $\quad\det\big(P^{-1}AP\big)=\det(P)^{-1}\det(A)\det(P)=\det(A)$.

(v) Nous devons montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$. Dans le calcul qui suit, on effectue le changement d'indice $j=\sigma(i)$ associé à la bijection σ, puis le changement d'indice $\varphi=\sigma^{-1}$ associé à la bijection $\sigma\longmapsto\sigma^{-1}$ de S_n sur S_n (de réciproque elle-même). Remarquons par ailleurs que pour tout $\varphi\in S_n$: $\quad\varepsilon(\varphi)=\pm1\quad$ donc $\varepsilon\big(\varphi^{-1}\big)=\varepsilon(\varphi)^{-1}=\varepsilon(\varphi)$.
$$\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}\overset{j=\sigma(i)}{=}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)}\overset{\varphi=\sigma^{-1}}{=}\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon\big(\varphi^{-1}\big)\prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)}=\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)\prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

La notion de *polynôme caractéristique* n'est pas au programme de MPSI mais je tiens à ce que vous la connaissiez déjà, et vous l'étudierez de toute façon en deuxième année. Jusqu'ici, nos matrices ont toutes été à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ et non pas dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$, mais en réalité la théorie que nous venons de développer sur $\mathbb{C}$ est valable sur $\mathbb{C}(X)$. Le déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_n\big(\mathbb{C}(X)\big)$ est toujours un scalaire, mais attention, les scalaires sont ici des fractions rationnelles !

Théorème (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\chi_A(X)=\det(XI_n-A)$.

(i) χ_A est un polynôme unitaire de degré n appelé le *polynôme caractéristique de A*.

(ii) Les racines (complexes) de χ_A sont exactement les valeurs propres (complexes) de A.

(iii) Pour toute matrice $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ semblable à A : $\quad\chi_B=\chi_A$.

Démonstration

(i) $\displaystyle\chi_A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n\big(X\delta_{\sigma(i)i}-a_{\sigma(i)i}\big)$, donc χ_A est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, mais dans cette somme, le terme associé à une permutation $\sigma\in S_n$ peut-il être de degré n ? Oui, mais seulement si $\sigma(i)=i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, i.e. si $\sigma=\mathrm{Id}$, auquel cas : $\displaystyle\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n\big(X\delta_{\sigma(i)i}-a_{\sigma(i)i}\big)=\prod_{i=1}^n(X-a_{ii})$.
Conclusion : χ_A est unitaire de degré n.

(ii) Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$: $\quad\lambda$ est racine de $\chi_A\iff\chi_A(\lambda)=0\iff\det(\lambda I_n-A)=0$
$\iff A-\lambda I_n$ n'est pas inversible $\iff\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)\neq\{0\}\iff\lambda$ est valeur propre de A.

(iii) Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ semblable à A, disons $B=P^{-1}AP$ pour une certaine matrice $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Aussitôt :
$$\chi_B(X)=\det\big(XI_n-P^{-1}AP\big)=\det\big(P^{-1}(XI_n-A)P\big)=\det(P)^{-1}\det(XI_n-A)\det(P)=\chi_A(X).$$

4.2 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) Pour tous $A_1\in\mathscr{M}_{p_1}(\mathbb{K}),\dots,A_r\in\mathscr{M}_{p_r}(\mathbb{K})$:
$$\begin{vmatrix}A_1&\times&\times\\&\ddots&\times\\&&A_r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1&&\\\times&\ddots&\\\times&\times&A_r\end{vmatrix}=\det(A_1)\dots\det(A_r).$$
En particulier, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration L'invariance par transposition permet de ne travailler qu'avec des matrices triangulaires supérieures par blocs.

- **Cas d'une matrice triangulaire tout court :** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Dans la relation $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$, si le terme associé à une permutation σ est non nul, alors $a_{\sigma(i)i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc $\sigma(i) \leqslant i$, mais nous allons voir qu'en fait $\sigma(i) = i$ par récurrence forte.

  Initialisation : $\sigma(1) \leqslant 1$ et $\sigma(1) \in [\![1,n]\!]$, donc $\sigma(1) = 1$.

  Hérédité : Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. On suppose que $\sigma(j) = j$ pour tous $j \in [\![1,i]\!]$. Que vaut $\sigma(i+1)$? Par hypothèse de récurrence et injectivité de σ : $\sigma(i+1) \leqslant i+1$, mais nous savons par hypothèse de récurrence et injectivité que $\sigma(i+1) \notin [\![1,i]\!]$ — d'où l'égalité.

  Conclusion : si le terme associé à une permutation σ est non nul dans la définition de $\det(A)$, forcément $\sigma = \mathrm{Id}$. En retour : $\det(A) = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^{n} a_{\mathrm{Id}(i)i} = a_1 \dots a_n$.

- **Cas d'une matrice triangulaire par blocs :** Nous prouverons seulement le résultat pour $r = 2$, le cas général s'obtient ensuite aisément par récurrence. Fixons $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et notons $\mathscr{B}_p$ (resp. $\mathscr{B}_q$) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^q$). Objectif : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

  L'application $(M_1, \dots, M_p) \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} M & X \\ 0 & B \end{vmatrix}$ de $\left(\mathbb{K}^p\right)^p$ dans $\mathbb{K}$ — où M est la matrice de colonnes $M_1, \dots, M_p$ — est clairement linéaire alternée, donc $\varphi = \varphi\big(\mathscr{B}_p\big) \det_{\mathscr{B}_p}$. A fortiori, en notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A :
  $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi(C_1, \dots, C_p) = \det_{\mathscr{B}_p}(C_1, \dots, C_p)\, \varphi\big(\mathscr{B}_p\big) = \det(A) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix}$.
  De même, l'application $(N_1, \dots, N_q) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & N \end{vmatrix}$ de $\left(\mathbb{K}^q\right)^q$ dans $\mathbb{K}$ — où N est la matrice de lignes $N_1, \dots, N_q$ — est linéaire alternée, donc $\psi = \psi\big(\mathscr{B}_q\big) \det_{\mathscr{B}_q}$, et en notant $L_1, \dots, L_q$ les lignes de B :
  $$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\psi(L_1, \dots, L_q) = \det(A)\det_{\mathscr{B}_q}(L_1, \dots, L_q)\psi\big(\mathscr{B}_q\big) = \det(A)\det(B) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{vmatrix},$$
  et donc comme la matrice $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est « vraiment » triangulaire : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$. ■

Exemple $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-14) \times (-1) = 14$ et $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) = -2$.

4.3 Calcul de déterminants par la méthode du pivot

Fixons à présent $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et notons $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

— Par linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable et caractère alterné de l'application $\det_{\mathscr{B}_n}$:
$$\det_{\mathscr{B}_n}(\dots, C_j + \lambda C_i, \dots) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \dots, C_n) + \lambda \det_{\mathscr{B}_n}(\dots, C_i, \dots) = \det(A) + 0 = \det(A).$$

— Par linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable : $\det_{\mathscr{B}_n}(\dots, \lambda C_j, \dots) = \lambda \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \dots, C_n) = \lambda \det(A)$.

— Par caractère alterné : $\det_{\mathscr{B}_n}(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots) = -\det_{\mathscr{B}_n}(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) = -\det(A)$.

Ces petits calculs de rien du tout sont notre prochain théorème.

Théorème (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires) Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ ne modifient pas les déterminants.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_j \leftarrow \lambda C_j$ multiplient les déterminants par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \longleftrightarrow L_j$ et $C_j \longleftrightarrow C_i$ multiplient les déterminants par -1.

Il nous a suffi de montrer le résultat sur les colonnes car le déterminant est invariant par transposition.

Exemple
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} \times 1$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3 \quad = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -11 & -9 \end{vmatrix} = 2.$$

Exemple Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$:
$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + bL_2 + bL_3 \quad = (b-a)^2(a+2b).$$

4.4 Développement par rapport à une ligne/colonne et formule d'inversion

On développe à présent une nouvelle stratégie de calcul des déterminants matriciels. Si nous notons $\mathscr{B}_n = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$:
$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \ldots C_n) = \det_{\mathscr{B}_n}\left(\ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij}E_i, C_{j+1}, \ldots\right) \overset{n\text{-linéarité}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\mathscr{B}_n}\big(\ldots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \ldots\big)$$
$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]}}_{\substack{\text{On échange la } j^{\text{ème}} \text{ colonne avec la } (j-1)^{\text{ème}}, \\ \text{puis la } (j-1)^{\text{ème}} \text{ avec la } (j-2)^{\text{ème}}, \text{ etc.} \\ \text{Au total, } j-1 \text{ échanges de colonnes, d'où le } (-1)^{j-1}.}}$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]}}_{\substack{\text{Même chose sur les lignes.} \\ \text{La matrice obtenue est triangulaire par blocs.}}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Morale de l'histoire, un déterminant de taille n peut être calculé comme une combinaison linéaire de déterminants de taille $n-1$. Plus précisément, les déterminants de taille $n-1$ auxquels nous avons permis d'apparaître ne sont jamais que des déterminants de la matrice A à laquelle on a supprimé une ligne et une colonne.

Définition (Mineurs, cofacteurs, comatrice) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- **Mineurs :** On appelle *mineur de A de position (i, j)* le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. Nous le noterons $\Delta_{ij}(A)$ dans ce cours mais la notation n'est pas universelle.
- **Cofacteurs :** On appelle *cofacteur de A de position (i, j)* le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.
- **Comatrice :** On appelle *comatrice de A* la matrice des cofacteurs de A : $\quad \mathrm{com}(A) = \Big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Le cofacteur de position (i, j) est égal, au signe près, au mineur de même position — mais comment ces signes sont-ils distribués ? La matrice ci-contre schématise leur distribution.
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez de tête !

Finalement, nous avons démontré en introduction de ce paragraphe le théorème suivant.

Théorème **(Développement par rapport à une ligne ou une colonne)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Développement par rapport à une ligne :** Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\qquad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A).$
- **Développement par rapport à une colonne :** Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A).$

Ces formules se comprennent sur des exemples simples. En voici un, où l'on développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \overbrace{+1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}}^{\text{Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour expliquer.}} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, la nullité du déterminant montre que la matrice 3×3 considérée n'est pas inversible.

Le développement par rapport à une ligne/colonne est souvent utile, mais dans la mesure du possible, il faut choisir de développer par rapport à une ligne/colonne contenant beaucoup de zéros. En règle générale, je vous conseille de privilégier la méthode du pivot, qui fournit davantage des résultats sous forme factorisée — car après tout, ce que l'on veut savoir d'un déterminant, c'est souvent s'il est nul ou non.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad = \overbrace{1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{3^{\text{ème}} \text{ colonne}} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2} C_3 \end{matrix}$$

$$= 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \quad = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \times 1 = 4.$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n]} = 2^{n+1} - 1.$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons D_n le déterminant de taille n étudié. Un développement par rapport à la première colonne fournit aisément la relation de récurrence suivante, vraie pour $n \geqslant 3$: $\quad D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$ — il faut l'écrire soi-même pour s'en convaincre. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, polynôme dont les racines sont 1 et 2, distinctes. Il existe ainsi deux réels λ et μ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad D_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$. $\quad$ Or $D_1 = 3$ et $D_2 = 7$, donc $\lambda = 2$ et $\mu = -1$, et finalement $D_n = 2^{n+1} - 1$.

Théorème **(Formule d'inversion)** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\qquad A\,\mathrm{com}(A)^\top = \mathrm{com}(A)^\top A = \det(A)\, I_n$.

En particulier, si A est inversible : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, \mathrm{com}(A)^\top$.

Démonstration Nous montrerons seulement que $A\,\mathrm{com}(A)^\top = \det(A)\, I_n$, i.e. que pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(A) = \det(A)\, \delta_{ij}$. $\quad$ Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$.

- Pour $i = j$, le résultat n'est qu'un développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.
- Et pour $i \neq j$? Remplaçons dans A la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ et notons B la matrice obtenue. Les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de B étant égales : $\quad \det(B) = 0$. $\quad$ Développons par ailleurs $\det(B)$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ ligne. Les mineurs $\Delta_{jk}(A)$ de A et $\Delta_{jk}(B)$ de B associés à cette ligne étant égaux :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(A) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(B) = \det(B) = 0.$$

Exemple Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$: $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, \mathrm{com}(A)^\top = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. $\quad$ Résultat bien connu !

Attention ! La formule d'inversion est plus satisfaisante pour l'esprit qu'en pratique, ne vous en servez pas pour inverser une matrice concrète ! Elle ramène en effet le calcul de A^{-1} au calcul de $\det(A)$ et $\mathrm{com}(A)$, c'est-à-dire au calcul d'un déterminant de taille n et de n^2 déterminants de taille $n-1$ — ce qui est fort coûteux.

Exemple Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$. Nous savons déjà que la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ de $x_1,\dots,x_n$ est inversible si et seulement si $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.

Nous allons retrouver ce résultat en montrant que son déterminant vaut $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$, mais honnêtement, si on veut seulement la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité des matrices de Vandermonde, le calcul qui suit est bien trop compliqué.

Démonstration Pour tous $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$, notons $V_n(x_1,\dots,x_n)$ le déterminant de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$.

- Fixons $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$ distincts. La matrice de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$ et X est à coefficients dans $\mathbb{C}(X)$, donc son déterminant $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,X)$ est une fraction rationnelle. Cela dit, après développement par rapport à la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne, $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ pour certains $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{C}$, donc P est un polynôme de degré au plus n. En outre, $a_n = V_n(x_1,\dots,x_n)$.

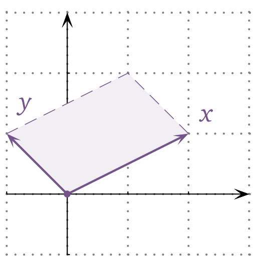
  À présent, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_i) = 0$ car les lignes $i^{\text{ème}}$ et $(n+1)^{\text{ème}}$ de la matrice de Vandermonte sous-jacente sont identiques, donc $V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,X)$ admet $x_1,\dots,x_n$ pour racines distinctes.

  Par conséquent : $\displaystyle V_{n+1}(x_1,\dots,x_n,X) = V_n(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$. Cette égalité reste vraie si $x_1,\dots,x_n$ ne sont pas distincts car elle s'écrit alors $0=0$.

- Il n'est finalement pas très dur de montrer par récurrence que pour tous $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$:
$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

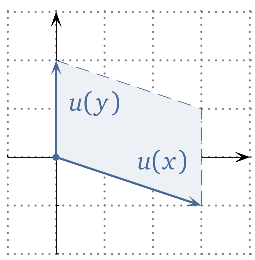
5 Déterminant d'un endomorphisme

Nous sommes maintenant au point sur la notion de volume orienté généralisé, mais une question subsiste — comment les endomorphismes se comportent-ils vis-à-vis d'un volume orienté ? On a noté ci-dessous $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}]{u(x,y)=(x+y,\,y-x)}$$



$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\big(u(x),u(y)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'égalité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\big(u(x),u(y)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x,y)$ s'écrit : $\overbrace{\det_{\mathscr{B}_2}\big(u(x),u(y)\big)}^{=6} = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)\big)\times\overbrace{\det_{\mathscr{B}_2}(x,y)}^{=3}$ en termes de déterminants, ce qui montre que l'endomorphisme u agit sur les volumes orientés en les multipliant par $\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)\big)=2$. C'est ce facteur 2 que nous appelons ci-après le *déterminant de u*.

Définition-théorème (Déterminant d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie pour le calculer. On l'appelle *déterminant de u*, noté $\det(u)$.

Attention ! Pour commencer, seul le déterminant d'un ENDOmorphisme est ainsi défini. Ensuite, le déterminant d'une famille de vecteurs était relatif à une base, mais ce n'est plus le cas pour celui d'un endomorphisme.

Démonstration Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ sont semblables, donc ont le même déterminant.

Théorème (Déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si on note $\widehat{A}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\det\big(\widehat{A}\big) = \det(A)$.

Démonstration Rappelons ici que par définition, $\det(A)$ est le déterminant de la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ de A dans la base canonique $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{K}^n$. Par conséquent : $\det\big(\widehat{A}\big) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}\big(\widehat{A}\big)\Big) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \ldots, C_n) = \det(A)$. ■

Théorème (Propriétés du déterminant d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) **Effet d'un endomorphisme sur un déterminant de famille de vecteurs :** Pour toute base $\mathscr{B}$ de E et pour toute famille $\mathscr{X}$ de n vecteurs de E : $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{X})\big) = \det(u)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$.

(ii) **Déterminant d'une composée :** $\det(uv) = \det(u)\det(v)$.

Attention !

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

(iii) **Caractérisation des automorphismes :** u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

Dans ce cas : $\det\big(u^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Attention ! Le déterminant n'est pas linéaire. En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda u + \mu v) \cancel{=} \lambda\det(u) + \mu\det(v)$.

Démonstration Fixons $\mathscr{B}$ une base de E.

(i) $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{X})\big) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{X})\big)\Big) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\big) = \det(u)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$.

(ii) $\det(uv) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(uv)\big) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\Big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\big) = \det(u)\det(v)$.

(iii) u est un automorphisme de E si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de E, autrement dit si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big) \neq 0$, ou encore $\det(u) \neq 0$. ■

On étend maintenant aux endomorphismes la notion de *polynôme caractéristique*.

Théorème (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

(i) Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}$ de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E choisie pour le calculer. On l'appelle le *polynôme caractéristique de* u, noté χ_u.

Ce polynôme est unitaire de degré n et pour tout $x \in \mathbb{K}$: $\chi_u(x) = \det\big(x\,\mathrm{Id}_E - u\big)$.

(ii) Les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$ sont exactement les valeurs propres de u.

Démonstration Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ sont semblables, donc $XI_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $XI_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ aussi dans $\mathscr{M}_n\big(\mathbb{C}(X)\big)$ avec la même matrice de passage. ■