Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, mais en pratique, nous travaillerons essentiellement avec les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Après les groupes et les anneaux, les *espaces vectoriels* sont un nouvel exemple fondamental de structure algébrique, mais vous en saurez bientôt beaucoup plus sur les espaces vectoriels que sur les groupes et les anneaux. La théorie des espaces vectoriels est appelée l'*algèbre linéaire*. C'est parti !

1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

1.1 Espaces vectoriels et algèbres

Définition (Espace vectoriel) On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* tout triplet $(E,+,\cdot)$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(E,+)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et appelé le *vecteur nul de* E,

— $\cdot$ est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E. À partir d'un élément λ de $\mathbb{K}$ et d'un élément x de E, $\cdot$ fournit un élément de E noté $\lambda\cdot x$ ou plus simplement λx. Par définition, cette application $\cdot$ doit satisfaire les propriétés suivantes :

$\longrightarrow$ pour tout $x\in E$: $\quad 1\cdot x = x$,

$\longrightarrow$ pour tous $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$: $\quad \lambda\cdot(x+y)=(\lambda\cdot x)+(\lambda\cdot y)$,

$\longrightarrow$ pour tous $x\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: $\quad (\lambda+\mu)\cdot x=(\lambda\cdot x)+(\mu\cdot x)$,

$\longrightarrow$ pour tous $x\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: $\quad \lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des *vecteurs*. L'application $\cdot$, qui n'est pas une loi interne sur E puisqu'à travers elle des éléments de $\mathbb{K}$ agissent sur des vecteurs, est qualifiée de *loi externe*. En tant qu'ils agissent via $\cdot$ sur les vecteurs de E, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires*. La loi $+$ est appelée *addition* et la loi $\cdot$ *multiplication par un scalaire*. Le corps $\mathbb{K}$ est appelé le *corps de base* de E.

Les règles de calcul de cette définition sont exactement celles auxquelles les vecteurs du plan et de l'espace obéissent. Par analogie, le mot *vecteur* sera désormais employé pour désigner de nombreux objets mathématiques que nous n'avions pas l'habitude d'appeler des vecteurs, mais que nous gagnerons à visualiser comme tels. Il est très important de se représenter les espaces vectoriels, même les plus abstraits, comme des mondes géométriques semblables au plan ou à l'espace. La pertinence d'une telle représentation paraîtra évidente quand nous aurons un peu avancé dans la théorie.

La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire. On continue cependant d'en mettre quand on fait de la géométrie classique dans le plan et dans l'espace.

Théorème (Règles de calcul dans un espace vectoriel) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Pour tous $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$: $\qquad \lambda\cdot x=0_E \iff \lambda=0$ ou $x=0_E$.

(ii) Pour tout $x\in E$: $\quad -x=(-1)\cdot x$, $\quad$ où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

(i) Trois étapes. Soient $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

— D'abord : $\quad 0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x$, $\quad$ donc $0\cdot x=0_E$ après simplification dans le groupe $(E,+)$.

— Ensuite : $\quad \lambda\cdot 0_E=\lambda\cdot(0_E+0_E)=\lambda\cdot 0_E+\lambda\cdot 0_E$, $\quad$ donc $\lambda\cdot 0_E=0_E$ après simplification.

— Enfin, si $\lambda\cdot x=0_E$ avec $\lambda\neq 0$, alors $x=1\cdot x=\left(\dfrac{1}{\lambda}\times\lambda\right)\cdot x=\dfrac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot x)=\dfrac{1}{\lambda}\cdot 0_E=0_E$.

(ii) Pour tout $x\in E$: $\quad x+(-1)\cdot x=1\cdot x+(-1)\cdot x=(1-1)\cdot x=0\cdot x=0_E$, $\quad$ donc $-x=(-1)\cdot x$.

Exemple $(\mathbb{K},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration Simple conséquence de la définition des corps. La multiplication $\times$ est une loi interne sur $\mathbb{K}$, mais on peut aussi la voir comme une loi externe.

Théorème (Espace vectoriel produit) Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un groupe commutatif pour la loi produit définie pour tous $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ par :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$.

Le triplet $\left(E_1 \times \ldots \times E_n, +, \cdot\right)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici : $\quad 0_{E_1 \times \ldots \times E_n} = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.

Démonstration Vérifions seulement deux axiomes sur les quatre de la définition des espaces vectoriels. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$: $\quad 1 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ $\quad$ et :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \big((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = \big(\lambda \cdot (x_1 + y_1), \ldots, \lambda \cdot (x_n + y_n)\big) \\ &= \big(\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1, \ldots, \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot x_n\big) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) + (\lambda \cdot y_1, \ldots, \lambda \cdot y_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Exemple (Familles de scalaires) En particulier, $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}^{n \text{ termes}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous retrouvons ici le cadre des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.
Par exemple : $\quad (1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$.

Exemple (Matrices) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, nous avons défini $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ au chapitre « Matrices et systèmes linéaires », mais n'importe quel corps $\mathbb{K}$ aurait fait l'affaire en réalité et il n'est pas dur de vérifier que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Par exemple, pour $n = 2$ et $p = 3$: $\quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 12 \\ 8 & 13 & 7 \end{pmatrix}$.

Exemple (Polynômes) $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Démonstration $\left(\mathbb{K}[X], +\right)$ est déjà un groupe commutatif et les autres axiomes se vérifient aisément.

Théorème (Espaces vectoriels d'applications) Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble E^X est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $f, g \in E^X$ par : $\quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $f \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \big(f(x)\big)$.

Le triplet $\left(E^X, +, \cdot\right)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici, 0_{E^X} est l'application nulle $x \longmapsto 0_E$ de X dans E.

Démonstration Vérifions seulement deux axiomes sur les quatre. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in E^X$. Alors $1 \cdot f = f$ car pour tout $x \in X$: $\quad (1 \cdot f)(x) = 1 \cdot \big(f(x)\big) = f(x)$, $\quad$ et $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$ car pour tout $x \in X$:

$$\big(\lambda \cdot (f + g)\big)(x) = \lambda \cdot \big((f + g)(x)\big) = \lambda \cdot \big(f(x) + g(x)\big) = \lambda \cdot \big(f(x)\big) + \lambda \cdot \big(g(x)\big) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x).$$

Exemple (Fonctions et suites) Ici, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathbb{K}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.

Exemple Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Plus généralement, tout $\mathbb{L}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dès lors que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$. En particulier, $\mathbb{L}$ étant un $\mathbb{L}$-espace vectoriel, on peut aussi le voir comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration Dans un $\mathbb{L}$-espace vectoriel E, $\lambda \cdot x$ est défini pour tous $\lambda \in \mathbb{L}$ et $x \in E$, donc en particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. En restreignant le corps de base, on peut ainsi considérer E comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition (Algèbre) On appelle $\mathbb{K}$-*algèbre* tout quadruplet $(A, +, \cdot, \times)$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

— $(A, +, \times)$ est un anneau,

— pour tous $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\quad (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

L'application $\lambda \longmapsto \lambda \cdot 1_A$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{K}$ dans A. Grâce à ce morphisme, on a tendance à voir $\mathbb{K}$ à une partie de A en identifiant tout scalaire λ à l'élément $\lambda \cdot 1_A$ de A.

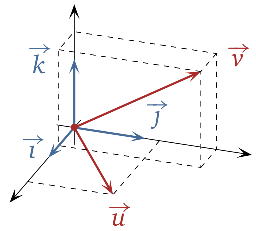
Pour tous $x \in A$ et $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Le résultat de cette *évaluation en* x est un élément de A et non pas un polynôme.

Exemple Nous connaissons déjà quelques $\mathbb{K}$-algèbres importantes : $\mathbb{K}$ bien sûr, mais aussi $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$, ou encore $\mathbb{K}^X$ pour tout ensemble non vide X.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition (Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle *combinaison linéaire de* $x_1, \ldots, x_n$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan ou dans l'espace. Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ mais ce n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.



Attention ! (Péché d'identification)

En général : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \;\cancel{\Longrightarrow}\; \lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Par exemple : $(1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = (3,3) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, $(2,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5,-2)$ et $(1,-3)$: $(2,7) = (5,-2) - 3(1,-3)$.

Démonstration

C'est l'existence de solutions qui compte.

$$(2,7) \text{ est combinaison linéaire de } (5,-2) \text{ et } (1,-3) \iff \boxed{\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},} \quad (2,7) = \lambda(5,-2) + \mu(1,-3)$$

$$\iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7. \end{array}\right.$$

Nous sommes ainsi ramenés à la résolution d'un système linéaire. Or pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ 13\lambda & & & = & 13 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \iff \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = -3.$$

Le système étudié possède des solutions, c'est exactement le résultat voulu.

Exemple Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{\exists\, x, y, z \in \mathbb{R},} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$$

C'est l'existence de solutions qui compte.

Résolvons ce système. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ & & 3y & - & z & = & 3 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Ce dernier système n'a pas de solution — d'où le résultat.

Exemple Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

Définition (Famille presque nulle de scalaires) On dit qu'une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est *presque nulle* si tous ses éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Si I est un ensemble fini, la précision « presque nulle » est sans intérêt.

Quand j'aurai besoin de mêler un quantificateur et une famille presque nulle, je m'autoriserai la notation suivante, bien pratique mais d'une correction toute relative : $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle, $\ldots$ Certains auteurs notent $\mathbb{K}^{(I)}$ avec des parenthèses l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I, mais nous éviterons cette notation car elle ressemble trop à la notation $\mathbb{K}^I$ de l'ensemble de toutes les familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Définition (Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs) Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire de* $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$.

Nous pourrons maintenant parler des combinaisons linéaires d'un nombre infini de vecteurs, mais chacune de ces combinaisons linéaires reste fondamentalement une somme finie. Les vraies sommes infinies n'ont aucun sens sans une notion de passage à la limite adéquat.

Pour un nombre fini de vecteurs, pas besoin de familles presque nulles ! Le concept sera surtout utilisé en cours.

Exemple $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Rappelons que la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ des polynômes cache toujours une somme finie.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition (Sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E stable par addition et multiplication par un scalaire. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de E* si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois de E.

Si F un sous-espace vectoriel de E, F est un sous-groupe additif de E, donc $0_F = 0_E \in F$.

Exemple Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\left\{0_E\right\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemple L'ensemble $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x^2 + x + y^2 = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire. En effet, $(-1,0) \in F$ mais $(-2,0) \notin F$.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) F est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $\begin{cases} \text{— } 0_E \in F. \\ \text{— } F \text{ est stable par combinaison linéaire : } \quad \forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F. \end{cases}$

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E = 0_F \in F$ et pour tous $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ car F est stable par multiplication par un scalaire, donc $\lambda x + y \in F$ car F est stable par addition.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si l'assertion (ii) est vraie, F est stable par différence pour $\lambda = -1$, donc est un sous-groupe additif de E. Pour les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels, qui peut le plus peut le moins ! ■

C'est toujours ce résultat qu'il faut utiliser pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.

Par ailleurs, pour montrer qu'un ensemble F muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer que F est un **SOUS-ESPACE VECTORIEL** d'un espace vectoriel connu.

Théorème (Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire **NON** homogène n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient même pas le vecteur nul.

Démonstration Posons $S = \left\{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\right\}$, qui est une partie de $\mathbb{K}^p$. Pour commencer, $0 \in S$ car $A \times 0 = 0$. Ensuite, S est stable par combinaison linéaire car pour tous $X, X' \in S$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$A(\lambda X + X') = \lambda AX + AX' = \lambda \times 0 + 0 = 0, \qquad \text{donc } \lambda X + X' \in S.$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré **AU PLUS** n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

En revanche, l'ensemble des polynômes de degré **EXACTEMENT** n n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient même pas le polynôme nul.

Démonstration Pour commencer, $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $0 \in \mathbb{K}_n[X]$ car $\deg(0) = -\infty \leqslant n$. Ensuite, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire car pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max\left\{\deg(P), \deg(Q)\right\} \leqslant n$, donc $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

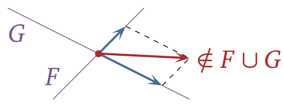
Exemple L'ensemble $F = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration Pour commencer, $F \subset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ de valeur 0 en 0, donc appartient à F. Ensuite, F est stable par combinaison linéaire car pour tous $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc $\lambda f + g \in F$.

Théorème (Intersection de sous-espaces vectoriels) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Pour commencer, $F \subset E$ et $0_E \in F$ car $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$, F_i étant un sous-espace vectoriel de E. Ensuite, pour la stabilité de F par combinaison linéaire, soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$, F_i contient x et y, donc $\lambda x + y$ en tant que sous-espace vectoriel de E. Par conséquent, $\lambda x + y \in F$.

Attention ! La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général — pourquoi diable serait-elle stable par addition ?



Définition-théorème (Sous-algèbre) Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et B une partie de A stable par addition, multiplication par un scalaire et produit. On dit que B est une *sous-algèbre de* A si B est une $\mathbb{K}$-algèbre pour les lois de A.

Caractérisation des sous-algèbres : Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et B une partie de A. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) B est une sous-algèbre de A.

(ii) $\begin{cases} \text{— } 1_A \in B. \\ \text{— } B \text{ est stable par combinaison linéaire : } \quad \forall x, y \in B, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in B. \\ \text{— } B \text{ est stable par produit : } \quad \forall x, y \in B, \quad xy \in B. \end{cases}$

Attention, c'est 1_A, pas 0_A !

Exemple L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Cet ensemble est inclus dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il contient I_n et toute combinaison linéaire et tout produit de matrices triangulaires supérieures sont encore des matrices triangulaires supérieures.

Exemple Ici, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\right\}$.

- Pour tout intervalle I et tout $k \in \mathbb{N} \cup \left\{\infty\right\}$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^I$.
- L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1.4 Sous-espaces affines

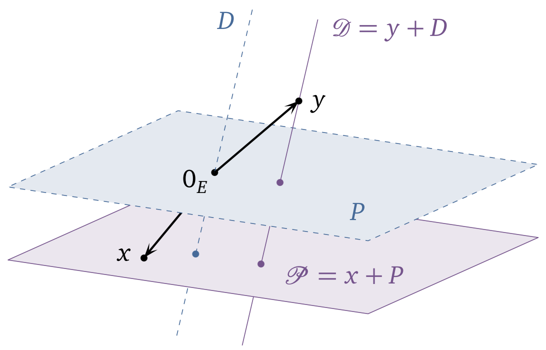
Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des vecteurs, mais dans le plan et dans l'espace, il est courant qu'on identifie les points et les vecteurs via le choix d'une origine O. Une fois qu'un tel point est fixé, toute relation $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ identifie le point M et le vecteur $\vec{u}$.

Plus généralement, tout élément d'un espace vectoriel quelconque E peut être vu comme un point via le choix du vecteur nul $O = 0_E$ comme origine. Si on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$ pour tous $A, B \in E$, alors pour tout $M \in E$, l'identification points-vecteurs s'écrit simplement : $\underbrace{M}_{\text{Point}} = \underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{Vecteur}}$.

Définition (Sous-espace affine, direction) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *sous-espace affine de E* toute partie $\mathscr{F}$ de E de la forme $\mathscr{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et x vecteur de E.

Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathscr{F}$ est unique. On l'appelle la *direction de $\mathscr{F}$* et ses éléments sont appelés les *vecteurs directeurs de $\mathscr{F}$*.

Je noterai les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites (F, G...) et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes ($\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$...).



Attention ! Tout sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace affine de E car $F = 0_E + F$, mais la réciproque est fausse car un sous-espace affine ne contient pas le vecteur nul en général.

Démonstration Montrons l'unicité de la direction de $\mathscr{F}$. Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E et $x, x' \in E$ pour lesquels $\mathscr{F} = x + F = x' + F'$. Pour montrer que $F = F'$, il nous suffit par symétrie de prouver l'inclusion $F \subset F'$. Soit $f \in F$. Alors $x = x + 0_E \in x + F = x' + F'$ et $x + f \in x + F$, donc $x = x' + f_1'$ et $x + f = x' + f_2'$ pour certains $f_1', f_2' \in F'$, donc $f = f_2' - f_1' \in F'$ par différence.

Théorème (Ensemble des solutions d'un système linéaire) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est compatible, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ et sa direction n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et tout plan de $\mathbb{R}^3$ en sont des sous-espaces affines.

Démonstration Posons $\mathscr{S} = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = B\}$ et $S = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\}$. Le système étudié étant compatible, nous pouvons nous en donner une solution particulière X_{part} et nous savons qu'alors $\mathscr{S} = X_{\text{part}} + S$. Nous avons déjà montré par ailleurs que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Exemple La droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ est un sous-espace affine de direction la droite d'équation $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

Exemple $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 2X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 0\}$.

Démonstration Il n'est pas dur de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Remarquons par ailleurs que $X \in \mathscr{E}$ — solution particulière ! Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \in \mathscr{E} \iff XP' + P = 2X \iff X(P-X)' + (P-X) = 0 \iff P - X \in E \iff P \in X + E.$$

Conclusion : $\mathscr{E} = X + E$, ce qui confirme que $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction E.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. Pour tout $A \in \mathscr{F}$: $\mathscr{F} = A + F$.

Ainsi, deux sous-espaces affines sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction et un point en commun.

Démonstration Par définition, $\mathscr{F} = x + F$ our un certain $x \in E$, donc $A = x + f$ pour un certain $f \in F$, puis $\mathscr{F} = x + F = (A - f) + F = A + (F - f)$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc $F - f \subset F = (F + f) - f \subset F - f$, donc $\mathscr{F} = A + (F - f) = A + F$.

Théorème (Intersection de sous-espaces affines) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E. Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathscr{F}_i$.

On dit que les $\mathscr{F}_i$, i décrivant I, sont *concourants* ou *sécants* si $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i \neq \varnothing$. Le cas échéant, $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\displaystyle\bigcap_{i\in I}F_i$.

Attention ! Alors qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul, une intersection de sous-espaces affines peut vraiment être vide. Pensez au cas de deux droites parallèles non confondues.

Démonstration Posons $\mathscr{F} = \displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ et $F = \displaystyle\bigcap_{i\in I}F_i$ et supposons $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Un point A de $\mathscr{F}$ étant donné, $\mathscr{F}_i = A + F_i$ pour tout $i \in I$. Il nous suffit dès lors de montrer que $\mathscr{F} = A + F$.

- Montrons que $\mathscr{F} \subset A + F$. Soit $M \in \mathscr{F}$. Pour tout $i \in I$, $M \in \mathscr{F}_i$ donc $M = A + f_i$ pour un certain $f_i \in F_i$. Ainsi, les f_i sont tous égaux, donc éléments de $\displaystyle\bigcap_{i\in I}F_i = F$, donc $M \in A + F$.
- Inversement, $F \subset F_i$ pour tout $i \in I$, donc $A + F \subset A + F_i = \mathscr{F}_i$, donc $A + F \subset \mathscr{F}$.

1.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

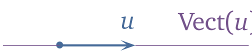
Définition (Sous-espace vectoriel engendré par une partie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E.

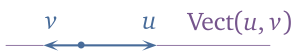
(i) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X est appelée le *sous-espace vectoriel (de E) engendré par X* et notée $\mathrm{Vect}(X)$. À ce titre, $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X.

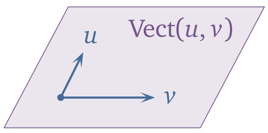
En particulier, tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\mathrm{Vect}(X)$.

(ii) Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathrm{Vect}(X)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$ et noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Quelques figures vaudront mieux qu'un long discours.







Démonstration

(i) En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E contenant X, $\mathrm{Vect}(X)$ est lui-même un sous-espace vectoriel de E contenant X, et c'est le plus petit puisqu'il est inclus dans tous.

(ii) Notons V l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$ et montrons que $V = \mathrm{Vect}(X)$. Or $\mathrm{Vect}(X)$ contient X et il est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E, donc $\mathrm{Vect}(X)$ contient toute combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$, autrement dit $V \subset \mathrm{Vect}(X)$. Pour l'inclusion réciproque, il nous suffit d'après (i) de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E contenant X.

D'abord, $V \subset E$ et V contient à la fois 0_E et X car $0_E = \displaystyle\sum_{i\in I} 0\cdot x_i$ et $x_j = 1\cdot x_j + \displaystyle\sum_{i\neq j} 0\cdot x_i$ pour tout $j \in I$. Ensuite, pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $v, w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, disons $v = \displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ et $w = \displaystyle\sum_{i\in I}\mu_i x_i$ pour certaines familles presque nulles $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. La famille $(\alpha\lambda_i + \mu_i)_{i\in I}$ est aussi presque nulle et $\alpha v + w = \displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha\lambda_i + \mu_i)x_i$, donc $\alpha v + w \in \mathrm{Vect}(X)$.

En pratique : Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit très souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, par convention des sommes vides : $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Exemple $\mathrm{Vect}\big((1,2)\big)$ est la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ dirigée par $(1,2)$.

Exemple $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\big(X^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\big(1, X, \ldots, X^n\big)$.

Exemple Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Exemple Le plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + 3z = 2$ est le sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$ passant par $(0,-2,0)$. En résumé, $\mathscr{P} = (0,-2,0) + \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$.

Démonstration $$\mathscr{P} = \Big\{(x, 2x+3z-2, z) \ \big| \ x,z \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(0,-2,0) + x\,(1,2,0) + z\,(0,3,1) \ \big| \ x,z \in \mathbb{R}\Big\} = (0,-2,0) + \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big).$$

Exemple La droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$ est le sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$ passant par $(0,1,-1)$. En résumé, $\mathscr{D} = (0,1,-1) + \mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $$(x,y,z) \in \mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_1 + \tfrac{1}{3}L_2$$ $$\iff y = 1 - 2x \quad \text{et} \quad z = 3x - 1,$$

donc $\mathscr{D} = \Big\{(x, 1-2x, 3x-1) \ \big| \ x \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(0,1,-1) + x\,(1,-2,3) \ \big| \ x \in \mathbb{R}\Big\} = (0,1,-1) + \mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$.

Exemple Sur le corps de base $\mathbb{R}$: $\mathrm{Vect}(1) = \Big\{a \times 1 \ \big| \ a \in \mathbb{R}\Big\} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{i}) = \Big\{a + \mathrm{i}b \ \big| \ a,b \in \mathbb{R}\Big\} = \mathbb{C}$, mais sur le corps de base $\mathbb{C}$: $\mathrm{Vect}(1) = \Big\{a \times 1 \ \big| \ a \in \mathbb{C}\Big\} = \mathbb{C}$.

Théorème (Propriétés des Vect) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X et Y deux parties de E et $x,a,b \in E$.

(i) **Inclusion :** Si $X \subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

(ii) **Ôter un vecteur :** Si $x \in X$ est combinaison linéaire de $X \setminus \{x\}$, alors $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}\big(X \setminus \{x\}\big)$.

(iii) **Remplacer un vecteur :** Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient **NON NUL** sur a :
$$\mathrm{Vect}\big(X \cup \{a\}\big) = \mathrm{Vect}\big(X \cup \{b\}\big).$$

Démonstration

(i) Toute combinaison linéaire de X est une combinaison linéaire de Y.

(ii) Soit $x \in X$ combinaison linéaire de $X \setminus \{x\}$. D'après (i) : $\mathrm{Vect}\big(X \setminus \{x\}\big) \subset \mathrm{Vect}(X)$. Dans l'autre sens, $\mathrm{Vect}\big(X \setminus \{x\}\big)$ est un sous-espace vectoriel contenant $X \setminus \{x\}$ et il contient aussi x par hypothèse, il contient donc X tout entier, donc $\mathrm{Vect}(X)$.

(iii) Dans un sens, $\mathrm{Vect}\big(X \cup \{a\}\big)$ contient X et a, donc b par hypothèse, donc $X \cup \{b\}$, donc $\mathrm{Vect}\big(X \cup \{b\}\big)$. Dans l'autre sens, $b = x + \lambda a$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ par hypothèse et $x \in \mathrm{Vect}(X)$, donc $a = \dfrac{b-x}{\lambda}$ est combinaison linéaire de $X \cup \{b\}$ avec un coefficient non nul sur b. L'inclusion $\mathrm{Vect}\big(X \cup \{a\}\big) \subset \mathrm{Vect}\big(X \cup \{b\}\big)$ se montre par conséquent comme on a prouvé l'autre, les rôles de a et b étant finalement symétriques.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$: $$\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,1,0),\overbrace{(1,3,0)}^{\substack{\text{Combinaison linéaire} \\ \text{de } (1,1,0) \text{ et } (0,1,0)}}\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)-(0,1,0),(0,1,0)\big)$$ $$= \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

2 Familles de vecteurs

2.1 Parties et familles génératrices

Définition (Partie/famille génératrice) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E. On dit que X est *génératrice de* E ou *engendre* E si tout élément de E est combinaison linéaire de X, i.e. si $E = \mathrm{Vect}(X)$.

Si $X = \big\{x_i \ \big| \ i \in I\big\}$, on dit aussi que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est *génératrice de* E ou *engendre* E.

Exemple $\big(X^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et $\big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1)$, donc la famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^2$. De même, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1)$, donc $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^3$.
Plus généralement, si on pose $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ où le coefficient 1 apparaît en $i^{\text{ème}}$ position, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$: $(x_1,\ldots,x_n) = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Exemple La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ car pour tous $a,b,c,d \in \mathbb{K}$:
$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
Plus généralement, si on note E_{ij}, pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i,j) qui vaut 1, la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ engendre $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$.

Exemple La famille $(1,\mathrm{i})$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à l'engendrer en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Le résultat qui suit n'est qu'une simple reformulation du théorème « Propriétés des Vect ».

Théorème (Propriétés des parties génératrices) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X et Y deux parties de E.

- **Inclusion :** Si X engendre E et si $X \subset Y$, alors Y engendre E.
- **Ôter un vecteur :** Si X engendre E et si $x \in X$ est combinaison linéaire de $X \setminus \{x\}$, alors$X \setminus \{x\}$ engendre E.
- **Remplacer un vecteur :** Si $X \cup \{a\}$ engendre E et si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, alors $X \cup \{b\}$ engendre E.

En pratique : Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un Vect.

Exemple L'ensemble $E = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \big|\ \ x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + t = 0\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$: $(x,y,z,t) \in E \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} z &=& x &+& 2y \\ t &=& -x &+& y, \end{array}\right.$ donc :
$E = \Big\{(x,y,x+2y,-x+y) \ \big|\ \ x,y \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{x(1,0,1,-1)+y(0,1,2,1) \ \big|\ \ x,y \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.
Cela montre à la fois que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$ engendre E.

Exemple L'ensemble $F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \ \big|\ \ 2P(X+1) = XP'\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par X^2-4X+3.

Démonstration Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:
$$P \in F \iff 2P(X+1) = XP' \iff 2a\,(X+1)^3 + 2b\,(X+1)^2 + 2c\,(X+1) + 2d = X\left(3aX^2 + 2bX + c\right)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 3a \\ 6a+2b &=& 2b \\ 6a+4b+2c &=& c \\ 2a+2b+2c+2d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ 4b+c &=& 0 \\ b+c+d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ c &=& -4b \\ d &=& 3b. \end{array}\right.$$
Conclusion : $F = \Big\{bX^2 - 4bX + 3b \ \big|\ \ b \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{b\left(X^2-4X+3\right) \ \big|\ \ b \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\big(X^2-4X+3\big)$, ce qui montre à la fois que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\big(X^2-4X+3\big)$ en est une famille génératrice.

2.2 Parties et familles libres ou liées

Définition-théorème (Partie/famille libre d'un nombre fini de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\ldots,x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ ou la partie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est *libre* ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont *linéairement indépendants* si : $\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n),(\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{K}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i = \sum_{i=1}^n \mu_ix_i \implies \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right)$.
En pratique, $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si :
$$\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i = 0_E \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\right).$$

Démonstration Pour l'équivalence des deux définitions, poser $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$ dans un sens et remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ dans l'autre.

Famille génératrice	=	EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire.
Famille libre	=	UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, donc possibilité d'identifier les coefficients.

Par négation, dire que $(x_1,\ldots,x_n)$ n'est pas libre, c'est dire que pour certains $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$:
$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \exists\, i_0 \in [\![1,n]\!],\ \lambda_{i_0} \neq 0\right)$, auquel cas $x_{i_0} = -\dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i \neq i_0} \lambda_i x_i$ et x_{i_0} est combinaison linéaire des autres.

Définition (Partie/famille liée d'un nombre fini de vecteurs, vecteurs colinéaires) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\ldots,x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ ou la partie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est *liée* ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont *linéairement dépendants* si la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ n'est pas libre. Il est équivalent de dire que l'un des vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est combinaison linéaire des autres.

Pour deux vecteurs $x,y \in E$, on dit que x et y sont *colinéaires* si la famille (x,y) est liée, i.e. si x ou y est un multiple de l'autre.

Attention ! Quand $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée, l'un des vecteurs x_i est combinaison linéaire des autres, mais on ne sait pas lequel !

Exemple Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur nul est lié.

Démonstration Le vecteur nul est combinaison linéaire de tout ensemble de vecteurs — coefficients tous nuls...

Exemple La famille $(1,\mathrm{i})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Démonstration Montrons que $(1,\mathrm{i})$ est libre sur le corps de base $\mathbb{R}$. Or pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\lambda.1+\mu.\mathrm{i}=0$, $\lambda=\mu=0$ par simple identification des parties réelle et imaginaire.

En revanche, $(1,\mathrm{i})$ est liée sur le corps de base $\mathbb{C}$ car $\mathrm{i}=\mathrm{i}\times 1$ est un multiple complexe de 1.

Exemple Si on pose $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ où le coefficient 1 apparaît en $i^{\text{ème}}$ position, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration Pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: $x_1e_1+\ldots+x_ne_n=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, donc si $x_1e_1+\ldots+x_ne_n=0_{\mathbb{K}^n}$, alors $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ par simple identification des coefficients d'une famille.

Exemple Si on note E_{ij}, pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i,j) qui vaut à 1, la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par simple identification des coefficients d'une matrice.

Exemple La famille $\big((2,1),(-1,3),(0,1)\big)$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Pour tous $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$: $\lambda(2,1)+\mu(-1,3)+\nu(0,1)=(0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda & - & \mu & & & = & 0 \\ \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0. \end{array}\right.$

Ce système possède des solutions (λ,μ,ν) autres que $(0,0,0)$, par exemple $(1,2,-7)$, donc les vecteurs $(2,1)$, $(-1,3)$ et $(0,2)$ sont linéairement dépendants.

Exemple La famille $\big(X^2-X+1, X^2+X-2, X^2-2X+3\big)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration Pour tous $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$: $\lambda\big(X^2+X+1\big)+\mu\big(X^2-X-2\big)+\nu\big(X^2+2X+3\big)=0$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & 2\nu & = & 0 \\ \lambda & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 & \\ & & 2\mu & - & \nu & = & 0 & L_2 \leftarrow L_1-L_2 \\ & & 3\mu & - & 2\nu & = & 0 & L_3 \leftarrow L_1-L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 & \\ & & 2\mu & - & \nu & = & 0 & \\ & & \mu & & & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_2-L_3 \end{array}\right. \iff \lambda=\mu=\nu=0.$$

Exemple La famille $(\cos,\sin)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lambda\cos+\mu\sin=0$, i.e. que $\lambda\cos x+\mu\sin x=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions, $\lambda=\mu=0$ après évaluation en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Théorème (Liberté des familles de polynômes échelonnées en degré) Une famille de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dite *échelonnée en degré* si $0 \leqslant \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$. Une telle famille est toujours libre.

Démonstration Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, posons $d_j = \deg(P_j)$ et introduisons ses coefficients avec une double indexation : $P_j = a_{d_j,j}X^{d_j} + \dots + a_{1,j}X + a_{0,j}$. À présent, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires pour lesquels $x_1P_1 + \dots + x_nP_n = 0$. On tire de cette relation un système linéaire de n équations et n inconnues par identification des coefficients de degrés $d_1, \dots, d_n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccl} a_{d_1,1}x_1 & + & a_{d_1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{d_1,n-1}x_{n-1} & + & a_{d_1,n}x_n & = & 0 & & (\text{degré } d_1) \\ & & a_{d_2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{d_2,n-1}x_{n-1} & + & a_{d_2,n}x_n & = & 0 & & (\text{degré } d_2) \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{d_{n-1},n-1}x_{n-1} & + & a_{d_{n-1},n}x_n & = & 0 & & (\text{degré } d_{n-1}) \\ & & & & & & & & a_{d_n,n}x_n & = & 0 & & (\text{degré } d_n). \end{array}\right.$$

Le système obtenu est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls — non nuls car $a_{d_j,j} \neq 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ par définition de d_j — donc admet $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ pour seule solution.

Définition (Partie/famille libre/liée d'un nombre quelconque de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- **Partie/famille libre :** On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ou la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ est *libre* ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont *linéairement indépendants* si :
$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle,} \qquad \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \ \lambda_i = 0\right).$$
- **Partie/famille liée :** On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ou la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ est *liée* ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont *linéairement dépendants* si $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas libre. Il est équivalent de dire que l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

L'expression « presque nulle » nous ramène toujours à un nombre fini de vecteurs utiles, donc la liberté d'une famille infinie de vecteurs est équivalente à la liberté de toutes ses sous-familles finies. Pour montrer qu'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs est libre, il suffit même de montrer que la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple L'ensemble vide est une partie vide de tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ par simple identification des coefficients.

Théorème (Propriétés des parties libres/liées) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X et Y deux parties de E.

(i) **Inclusion :** Si Y est libre et si $X \subset Y$, alors X est libre.

Par contraposition, si X est liée et si $X \subset Y$, alors Y est liée.

(ii) **Ajouter un vecteur :** Si X est libre et si $y \in E$ n'est pas combinaison linéaire de X, alors $X \cup \{y\}$ est libre.

Dire qu'une famille est libre, c'est dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres, donc si on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, il faut veiller à ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs. On ne peut donc ajouter qu'un vecteur linéairement indépendant des autres.

Démonstration

(i) Si X est liée et si $X \subset Y$, l'un des vecteurs de X est combinaison linéaire des autres, donc ce vecteur, élément de Y, est combinaison linéaire des autres, donc Y est liée.

(ii) Supposons X libre et donnons-nous un vecteur $y \in E$ non combinaison linéaire de X. Pour montrer que $X \cup \{y\}$ est libre, soient $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle et $\mu \in \mathbb{K}$ pour lesquels $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0_E$. Si jamais $\mu \neq 0$, alors $y = -\frac{1}{\mu}\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, contrairement à notre hypothèse. Par conséquent, $\mu = 0$ donc $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$ par liberté de X.

2.3 Bases

Définition **(Base, coordonnées)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une *base de E* si $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de E, i.e. si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ d'une et une seule manière.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ pour laquelle $x = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i$ est appelée la *famille des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$*.

On peut parler du caractère générateur ou de la liberté d'un ensemble de vecteurs, mais les bases sont toujours des **FAMILLES** car il faut bien ranger les coordonnées dans un certain ordre si on veut s'y retrouver !

Convention de la base vide : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$ possède-t-il une base ? Oui, la famille vide ! — autrement dit l'unique famille de vecteurs de E indexée par l'ensemble vide. Par convention des sommes vides, 0_E est en effet combinaison linéaire de la famille vide, et ce d'une et une seule manière. Ce point de vue peut paraître curieux, mais il rend de nombreuses preuves plus digestes.

L'énoncé suivant n'est une synthèse des exemples précédents.

Définition-théorème **(Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)**

- **Familles de scalaires :** Si on pose $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ où le coefficient 1 est en $i^{\text{ème}}$ position, $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée sa *base canonique*.
- **Polynômes :** $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée sa *base canonique* et $\left(1,X,X^2,\ldots,X^n\right)$ en est une de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée aussi sa *base canonique*.
- **Matrices :** Si on note E_{ij}, pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui de position de (i,j) qui vaut 1, $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée sa *base canonique*.

Attention ! Seuls vos profs de maths ont le super-pouvoir de décréter qu'une base est canonique ! « Canonique » signifie « la plus naturelle ». De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus simples et les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Les coordonnées dans la base canonique d'un vecteur $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont données par le vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ lui-même.
- Pour tout $P = a_0 + a_1X + \ldots \in \mathbb{K}[X]$, les coordonnées de P dans la base canonique sont données par la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients — i.e. par P lui-même étant donné notre construction de $\mathbb{K}[X]$, mais je vous rappelle qu'il faut oublier en pratique la manière dont les objets sont construits en mathématiques, car seules leurs propriétés comptent.
- Les coordonnées dans la base canonique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont données par la famille $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, i.e. par la matrice A elle-même.

Exemple La famille $\big((1,1),(1,2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous voulons montrer ceci : $\exists!\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad (x,y) = a\,(1,1) + b\,(1,2)$. Or pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,2) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ a & + & 2b & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ & & b & = & y-x \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution.

Si on veut connaître en plus les coordonnées de (x,y) dans la base $\big((1,1),(1,-2)\big)$, il ne reste qu'à achever la résolution du système précédent. Après calcul, ces coordonnées sont $(a,b) = (2x-y, y-x)$.

Exemple La famille $\left(X^2+X, X^2+1, X+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration On pourrait prouver en deux temps que $\left(X^2+X, X^2+1, X+1\right)$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, mais il y a plus simple. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ revient à montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est combinaison linéaire d'une unique façon de X^2+X, X^2+1 et $X+1$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\quad \exists!\,(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3,\quad P = \lambda\left(X^2+X\right) + \mu\left(X^2+1\right) + \nu(X+1).$$

Fixons $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:

$$P=\lambda\left(X^2+X\right)+\mu\left(X^2+1\right)+\nu(X+1) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & + & \mu & & & = & a\\ \lambda & & & + & \nu & = & b\\ & & \mu & + & \nu & = & c\end{array}\right. \quad \text{après identification}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & + & \mu & & & = & a\\ & & \mu & - & \nu & = & a-b\\ & & \mu & + & \nu & = & c\end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_1-L_2 \qquad \iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & + & \mu & & & = & a\\ & & \mu & - & \nu & = & a-b\\ & & & & \nu & = & \dfrac{-a+b+c}{2}\end{array}\right. \quad L_3\leftarrow \tfrac{1}{2}L_3-\tfrac{1}{2}L_2.$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution (λ,μ,ν) pour tout P fixé — d'où le résultat.

En pratique : Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on en cherche d'abord une famille génératrice en l'écrivant comme un Vect, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre.

Exemple L'ensemble F des matrices $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M^\top=M+\mathrm{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

Démonstration Faisons comme si la base $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ n'était pas fournie. Pour tout $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$:

$$A\in F \iff \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}+(a+d)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \iff d=-a \text{ et } c=b,$$

donc $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons finalement que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est libre. Or pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, si jamais $\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0$, il est immédiat que $\lambda=\mu=0$.

Exemple Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$ distincts. On note $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1,\dots,x_n$. La famille $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $\big(P(x_1),\dots,P(x_n)\big)$.

Démonstration Comme nous l'avons vu au chapitre « Polynômes et racines », $P=P(x_1)\,L_1+\ldots+P(x_n)\,L_n$ pour tout $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et aucun autre polynôme de la forme $y_1P_1+\ldots+y_nP_n$ ne coïncide avec P.

Exemple Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, la famille $\big(1,X-\lambda,(X-\lambda)^2,\dots,(X-\lambda)^n\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont données par la formule de Taylor polynomiale : $P=\displaystyle\sum_{i=0}^n\frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!}\,(X-\lambda)^i$.

Démonstration $\big(1,X-\lambda,(X-\lambda)^2,\dots,(X-\lambda)^n\big)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ d'après la formule de Taylor polynomiale, et pour tous $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$, si $a_0+a_1(X-\lambda)+\ldots+a_n(X-\lambda)^n=0$, alors $a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n=0$ après composition à droite par $X+\lambda$, donc $a_0=\ldots=a_n=0$.

Théorème (Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

(iii) La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et $L_1,\dots,L_n$ ses lignes. Le point important, c'est que pour tout $X\in\mathbb{K}^n$: $AX=x_1C_1+\ldots+x_nC_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \forall Y\in\mathbb{K}^n,\quad \exists!\,X\in\mathbb{K}^n,\quad Y=AX\\ &\iff \forall Y\in\mathbb{K}^n,\quad \exists!\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\quad Y=x_1C_1+\ldots+x_nC_n\\ &\iff (C_1,\dots,C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.\end{aligned}$$

En retour, les lignes de A n'étant jamais que les colonnes de $A^\top$:

$$A \text{ est inversible} \iff A^\top \text{ est inversible} \iff (L_1,\dots,L_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.$$

3 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

La notion de dimension fait aujourd'hui partie des meubles et tout le monde sait vaguement qu'un plan est de dimension 2 et que nous habitons un espace à 3 dimensions. Sur quelle définition rigoureuse ces intuitions reposent-elles cela dit ?

Définition (Espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* s'il possède une partie génératrice finie, et *de dimension infinie* sinon.

Exemple Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie car les bases canoniques sont des familles génératrices finies.

Exemple $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Démonstration Montrons qu'aucune famille finie de $\mathbb{K}[X]$ n'engendre $\mathbb{K}[X]$. Soit $(P_1,\ldots,P_r)$ une famille finie de polynômes non nuls. En notant m le maximum de leurs degrés, $\text{Vect}(P_1,\ldots,P_r) \subset \mathbb{K}_m[X] \neq \mathbb{K}[X]$, donc $(P_1,\ldots,P_r)$ n'engendre pas $\mathbb{K}[X]$.

3.1 EXISTENCE DE BASES FINIES

Dans notre espace physique à 3 dimensions, on a du mal à imaginer qu'il puisse exister des familles de strictement plus de trois vecteurs linéairement indépendants. Plus généralement :

Théorème (Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration Soient X une partie génératrice de E à n éléments et Y une partie libre de E. Supposant par l'absurde que Y possède au moins $n+1$ éléments, nous allons prouver par récurrence que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

E est engendré par une famille de n vecteurs dont les $n-k$ premiers sont dans X et les k suivants dans Y.

On pourra conclure de la manière suivante. Pour $k=n$, E est engendré par une famille de n vecteurs de Y. En particulier, tout vecteur de Y est combinaison linéaire de ces n vecteurs, donc comme Y possède au moins $n+1$ éléments, Y est liée — contradiction.

Initialisation : La famille des n vecteurs de X engendre E.

Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Faisons l'hypothèse que E est engendré par $(x_1,\ldots,x_{n-k},y_1,\ldots,y_k)$ pour certains $x_1,\ldots,x_{n-k} \in X$ et $y_1,\ldots,y_k \in Y$ — par convention, aucun vecteur de Y pour $k=0$. Comme Y possède au moins $n+1$ éléments, nous pouvons nous donner un élément y_{k+1} de Y autre que $y_1,\ldots,y_k$. Par hypothèse de récurrence, $y_{k+1} = \big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-k} x_{n-k}\big) + \big(\mu_1 y_1 + \ldots + \mu_k y_k\big)$ pour certains $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k},\mu_1,\ldots,\mu_k \in \mathbb{K}$.

Il est impossible que tous les λ_i soient nuls car y_{k+1} serait combinaison linéaire de $y_1,\ldots,y_k$ — or Y est libre. Quitte à modifier l'ordre des x_i, nous pouvons donc supposer $\lambda_{n-k} \neq 0$. De la sorte, x_{n-k} est combinaison linéaire de $x_1,\ldots,x_{n-k-1},y_1,\ldots,y_{k+1}$, donc E est engendré par la famille $(x_1,\ldots,x_{n-k-1},y_1,\ldots,y_{k+1})$ dont les $n-k-1$ premiers vecteurs sont dans X et les $k+1$ suivants dans Y.

Après ce premier théorème fondamental, l'*algorithme de la base incomplète* présenté ci-dessous est notre deuxième outil pour montrer l'existence de bases finies en dimension finie.

Théorème (Algorithme de la base incomplète) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Alors E possède une base constituée des vecteurs $x_1,\ldots,x_p$ et de certains des vecteurs $x_{p+1},\ldots,x_n$.

Démonstration Dans la preuve qui suit, les valeurs $n=0$ et $p=0$ sont autorisées.

- Ce théorème repose sur un algorithme simple et fondamental dit *de la base incomplète*. Nous allons compléter peu à peu la famille LIBRE $(x_1,\ldots,x_p)$ à l'aide de certains vecteurs parmi $x_{p+1},\ldots,x_n$ en prenant soin de CONSERVER LA LIBERTÉ À CHAQUE AJOUT.

  — La variable $\mathscr{B}$ est initialisée à la valeur $(x_1,\ldots,x_p)$, qui est libre.

— Ensuite on fait une boucle. Pour k décrivant $[\![p+1,n]\!]$:

si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est libre, i.e. si x_k n'est pas combinaison linéaire de $\mathscr{B}$, on remplace $\mathscr{B}$ par la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k — la nouvelle famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

Il n'est pas nécessaire de le préciser dans l'algorithme, mais si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est liée, on laisse $\mathscr{B}$ intacte et on re-boucle directement.

On a pris soin de conserver la liberté de $\mathscr{B}$ à chaque étape, donc la famille $\mathscr{B}$ finale est libre.

- Il reste à montrer que la famille $\mathscr{B}$ finale engendre E. Et comme $(x_1,\ldots,x_n)$ engendre E, il nous suffit en fait de montrer que les x_k sont tous combinaisons linéaires de $\mathscr{B}$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Si x_k apparaît explicitement dans $\mathscr{B}$, x_k est évidemment combinaison linéaire de $\mathscr{B}$. Supposons au contraire que x_k ne figure pas dans $\mathscr{B}$. À l'étape k, x_k n'a donc pas été ajouté à la famille $\mathscr{B}$ en cours de construction et la raison en était qu'il était dans ce cas aussi combinaison linéaire de certains vecteurs de $\mathscr{B}$. ■

Exemple La famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est une base de $F=\mathrm{Vect}\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\big)$.

Démonstration On va utiliser mécaniquement l'algorithme de la base incomplète. Petite remarque en passant, on obtiendrait une autre base de F en rangeant dès le départ différemment les vecteurs qui définissent F.

— La famille $\big((1,-5,7)\big)$ est libre car le vecteur $(1,-5,7)$ est non nul.

— Et la famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$? Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda(1,-5,7)+\mu(2,6,8)=(0,0,0)$. Aussitôt $\lambda+2\mu=0$ et $-5\lambda+6\mu=0$, donc assez vite $\lambda=\mu=0$. La famille est libre.

— Et la famille $\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15)\big)$? Elle est liée car $(3,1,15)=(1,-5,7)+(2,6,8)$.

— Et la famille $\big((1,-5,7),(2,6,8),(1,11,1)\big)$? Elle est liée car $(1,11,1)=(2,6,8)-(1,-5,7)$.

Comme voulu, la famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est une base de F.

Théorème (Théorèmes de la base incomplète/extraite et existence de bases finies) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(i) **Théorème de la base incomplète :** Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

(ii) **Théorème de la base extraite :** De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

La définition « posséder une famille génératrice finie » des espaces vectoriels de dimension finie est ainsi équivalente à la définition « posséder une base finie ».

Démonstration

(i) Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E — forcément finie comme on l'a vu. Ajoutons à cette famille les vecteurs d'une famille génératrice finie de E, puis appliquons l'algorithme de la base incomplète. Le résultat, c'est que $\mathscr{L}$ se trouve ainsi complétée en une base finie de E.

(ii) Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E — éventuellement infinie. Par hypothèse, E possède une partie génératrice finie X. Tout vecteur de X étant combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathscr{G}$, E est en fait engendré par une certaine sous-famille finie $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$. L'algorithme de la base incomplète permet alors de compléter la famille vide en une base de E par l'ajout de certains éléments de $\mathscr{G}'$. La base obtenue est une sous-famille de $\mathscr{G}$. ■

3.2 Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille de vecteurs

Intuitivement, on a bien envie de définir la dimension d'un espace vectoriel comme le nombre de vecteurs qu'on trouve dans ses bases, mais qui nous dit que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs ? Pourquoi un espace vectoriel ne pourrait-il pas être à la fois de dimension 2 et de dimension 3 ?

En principe, la notion de *cardinal* concerne les ensembles et les ensembles seulement, mais par abus de langage, une famille $(x_1,\ldots,x_n)$ de n objets est souvent appelée une famille *de cardinal* n, même en cas de répétitions.

Définition-théorème (Dimension) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les bases de E sont toutes finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la *dimension de E* et noté $\dim E$.

Si $\dim E=1$, on dit que E est une *droite* (*vectorielle*), et si $\dim E=2$, que E est un *plan* (*vectoriel*).

Démonstration Comme E est de dimension finie, ses familles libres sont finies, donc ses bases aussi. Soient $\mathscr{B}$ une base de E à n éléments et $\mathscr{B}'$ une base de E à n' éléments. Aussitôt, $n' \leqslant n$ car $\mathscr{B}$ engendre E et $\mathscr{B}'$ est libre, puis $n \leqslant n'$ par symétrie des rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, donc $n = n'$.

Exemple Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$: $\quad \dim E = 0$.

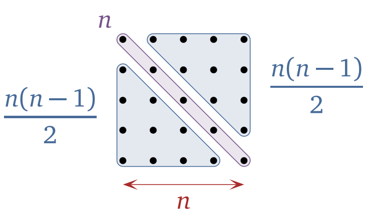
Théorème (Quelques dimensions usuelles) $\quad \dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np \quad$ et $\quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n \boxed{+1}$.

Ensuite, en notant $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (notation pas universelle), $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques :

$$\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration Pour les trois premières dimensions, combien de vecteurs dans les bases canoniques ? Notons ensuite $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Dimension de $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$:** $\quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$, $\quad$ donc $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et la famille $(E_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ l'engendre. Or cette famille est libre en tant que sous-famille de la base canonique, c'est donc une base de $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ et $\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$:**



$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & \cdots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} \;\middle|\; m_{1,1},\ldots,m_{1,n},m_{2,2},\ldots,m_{2,n},\ldots,m_{n,n} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_{kk}E_{kk} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{ij}\left(E_{ij}+E_{ji}\right) \;\middle|\; m_{1,1},\ldots,m_{1,n},m_{2,2},\ldots,m_{2,n},\ldots,m_{n,n} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\Big(\big\{E_{kk} \mid \ 1\leqslant k\leqslant n\big\} \cup \big\{E_{ij}+E_{ji} \mid \ 1\leqslant i<j\leqslant n\big\}\Big).$$

  Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et la famille des matrices E_{kk} et $E_{ij}+E_{ji}$ avec $i<j$ l'engendre. Il n'est ensuite pas trop dur de se convaincre que cette famille est libre, c'est donc une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Combien de vecteurs ? Il y a n vecteurs E_{kk} et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ vecteurs $E_{ij}+E_{ji}$ pour lesquels $i<j$, donc $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- **Dimension de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$:** Même principe, mais ici $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{ij}-E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

Théorème (Dimension et cardinal d'une partie libre/génératrice) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n.

Démonstration Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal n. Pour toute partie libre Y de E, sachant que $\mathscr{B}$ engendre E, nous avons déjà vu que Y possède au plus n éléments. De même, pour toute partie génératrice X de E, sachant que $\mathscr{B}$ est libre, $\mathscr{B}$ possède au plus autant d'éléments que X, donc X possède au moins n éléments.

Théorème (Caractérisation des bases en dimension finie) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, ou bien si et seulement si elle est génératrice.

Attention ! Ce théorème ne dit pas que base = famille génératrice = famille libre en dimension finie, mais seulement que c'est vrai pour les familles dont le cardinal coïncide avec la dimension de l'espace ambiant.

Démonstration Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, si une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs est libre (resp.génératrice), on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète (resp. en extraire une base d'après le théorème de la base extraite). Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a en fait ajouté (resp. ôté) aucun vecteur à $\mathscr{F}$. Conclusion : $\mathscr{F}$ était une base dès le départ !

Exemple La famille $\big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, nous saurons que la famille de trois vecteurs étudiée est une base quand nous aurons montré qu'elle est libre. Or pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, si $\lambda(0,1,2)+\mu(1,2,0)+\nu(2,0,1) = (0,0,0)$, alors clairement $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Le théorème suivant, étonnant et puissant, complète nos connaissances du chapitre « Matrices et systèmes linéaires ».

Théorème (Caractérisations diverses de l'inversibilité) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) A est *inversible à droite* : $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = I_n$.

(iii) A est *inversible à gauche* : $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad BA = I_n$.

(iv) Pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède au moins une solution.

(v) Le système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ admet 0 pour unique solution :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$

Il n'est pas anodin que l'une seulement des relations $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ implique l'inversibilité de A, et donc l'égalité $B = A^{-1}$. Dans la définition de l'inversibilité, les deux relations étaient nécessaires.

Ensuite, nous connaissions déjà une caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires. Elle ressemblait à l'assertion (iv), mais avec « une et une seule » à la place de « au moins une ». Enfin, grâce à l'assertion (v), l'unicité de la solution du système homogène démontre à elle seule l'inversibilité — pas besoin des autres seconds membres. C'est très fort.

Démonstration Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. La matrice A étant carrée, $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si elle est libre (ou génératrice) d'après le théorème précédent. Le reste n'est qu'un jeu de réécriture. Pour commencer, les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales.

- Si l'assertion (ii) est vraie, alors pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$: $A(BY) = (AB)Y = I_n Y = Y$, donc le système $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède au moins une solution. Bref, (ii) $\Longrightarrow$ (iv).
- Supposons (iii) vraie. Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, si $AX = 0$, alors $X = I_n X = (BA)X = B(AX) = B \times 0 = 0$, donc 0 est la seule solution du système homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. Bref, (iii) $\Longrightarrow$ (v).
- Ensuite :
$$\begin{aligned}
\text{(iv)} &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists X \in \mathbb{K}^n, \quad Y = AX \\
&\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad Y = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n \\
&\iff (C_1, \ldots, C_n) \text{ engendre } \mathbb{K}^n \\
&\iff (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \iff \text{(i)}.
\end{aligned}$$
- De même :
$$\begin{aligned}
\text{(v)} &\iff \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \big(x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n = 0 \implies x_1 = \ldots = x_n = 0\big) \\
&\iff (C_1, \ldots, C_n) \text{ est libre} \\
&\iff (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \iff \text{(i)}.
\end{aligned}$$

Exemple Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si AB est combinaison linéaire de A et B sans être colinéaire à A ou B, alors A et B commutent.

Démonstration Par hypothèse, $AB = \lambda A + \mu B$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ non nuls, donc :

$$(A - \mu I_n)(B - \lambda I_n) = AB - \lambda A - \mu B + \lambda \mu I_n = \lambda \mu I_n,$$

donc comme λ et μ sont non nuls, les matrices $A - \mu I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont inverses l'une de l'autre. Il en découle que $(B - \lambda I_n)(A - \mu I_n) = \lambda \mu I_n$ dans l'autre sens, i.e. que $BA = \lambda A + \mu B = AB$.

Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle *rang* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$, noté $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$, la dimension (finie) de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Il est toujours vrai que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants qu'elle contient.

Démonstration Engendré par un nombre fini de vecteurs, $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, or la dimension est toujours inférieure au nombre d'éléments d'une partie génératrice, donc

$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) \leqslant n$. Pour le cas d'égalité, nous avons vu qu'en dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice.

Exemple $\mathrm{rg}\big(1,X,X^2,X^3\big)=4$, $\mathrm{rg}\big(X,2X,3X\big)=1$, $\mathrm{rg}\big((1,1,0),(0,0,1)\big)=2$ et $\mathrm{rg}\big((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\big)=2$.

Théorème (Dimension d'un sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F=E$.

Démonstration L'ensemble $\mathscr{N}$ des nombres d'éléments des familles libres de F est non vide et majoré par $\dim E$ car d'une part la famille vide est libre, et d'autre part, toute famille libre de F est une famille libre de E, donc constituée d'au plus $\dim E$ vecteurs. Conclusion : $\mathscr{N}$ possède un plus grand élément n inférieur à $\dim E$.

Donnons-nous alors une famille libre $\mathscr{L}$ de F à n éléments. Pour tout $x\in F$, la famille $\mathscr{L}$ augmentée de x est liée par maximalité de n dans $\mathscr{N}$, donc comme $\mathscr{L}$ est libre, x est forcément combinaison linéaire de $\mathscr{L}$. Conclusion : libre et génératrice, $\mathscr{L}$ est une base de F, donc F est de dimension finie et $\dim F = n \leqslant \dim E$.

Et si $\dim F = \dim E = n$? Dans ce cas, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E à $n=\dim E$ éléments, donc c'est déjà une base de E et $E=\mathrm{Vect}(\mathscr{L})=F$.

Définition (Dimension d'un sous-espace affine) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. On dit que $\mathscr{F}$ est *de dimension finie* si F l'est et la dimension de F est alors appelée la *dimension de* $\mathscr{F}$.

Un petit exemple pour comprendre la preuve du théorème suivant.

Exemple La famille $\big((1,0),(X,0),(X^2,0),(0,1),(0,X)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_1[X]$ — les coordonnées d'un vecteur quelconque $\big(aX^2+bX+c\ ,\ dX+e\big)$ dans cette base sont (c,b,a,e,d).

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel produit) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et : $\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$.

Le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels.

Démonstration Donnons-nous $(e_1,\dots,e_m)$ une base de E et $(f_1,\dots,f_n)$ une base de F — éventuellement vides. Nous allons montrer que la famille $\mathscr{B}=\big((e_1,0_F),\dots,(e_m,0_F),(0_E,f_1),\dots,(0_E,f_n)\big)$ est une base de $E\times F$. Cela montrera bien que $E\times F$ est de dimension finie $m+n=\dim E+\dim F$.

- Montrons que $\mathscr{B}$ engendre $E\times F$. Pour tout $(x,y)\in E\times F$, en notant $(x_1,\dots,x_m)$ les coordonnées de x dans $(e_1,\dots,e_m)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ celles de y dans $(f_1,\dots,f_n)$:
$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^n y_jf_j\right)=\sum_{i=1}^m x_i\,(e_i,0_F)+\sum_{j=1}^n y_j\,(0_E,f_j).$$
- Pour la liberté, soient $\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_n\in\mathbb{K}$. Si jamais $\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_i\,(e_i,0_F)+\sum_{j=1}^n\mu_j\,(0_E,f_j)=(0_E,0_F)$, alors $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^m\lambda_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^n\mu_jf_j\right)=(0_E,0_F)$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_ie_i=0_E$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^n\mu_jf_j=0_F$, donc $\lambda_1=\ldots=\mu_n=0$ par liberté de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

3.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{X}=(x_1,\dots,x_p)$ une famille finie de vecteurs de E avec $p\geqslant 1$.

Pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ on note $(a_{1j},\dots,a_{nj})$ les coordonnées de x_j dans $\mathscr{B}$.

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est appelée la *matrice de* $\mathscr{X}$ *dans* $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})= & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_i \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Coordonnées de x_j dans $\mathscr{B}$ écrites en colonne

On connaît tout d'un vecteur quand on connaît ses coordonnées dans une base. On connaît donc tout d'une famille de vecteurs quand on connaît sa matrice dans une base. Ramener un vecteur à ses coordonnées ou une famille de vecteurs à sa matrice dans une base, c'est les désincarner pour n'en garder qu'un squelette numérique. Qu'on ait affaire à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des polynômes, des fonctions, des suites, toute information peut être numérisée matriciellement en dimension finie.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors pour tout $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple En notant $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}\big((1,0,3,1),(2,-1,0,-1)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\big(3X^2+2X+1, X, X^2-X\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}\big(3X^2+2X+1, X^2-X, X\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème (Matrice des colonnes dans la base canonique) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$. En notant $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(C_1, \ldots, C_p)$.

Démonstration Il suffit d'appliquer scrupuleusement la définition.

Théorème (Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

Démonstration Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$. Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j f_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} \text{ est une base de } E \quad & \iff \quad \forall y \in E, \quad \exists!\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{j=1}^n x_j f_j \\
& \iff \quad \forall y \in E, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i \\
& \iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ engendre } E \\
& \iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad y_i = (AX)_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ est libre} \\
& \iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad Y = AX \quad \iff \quad A \text{ est inversible.}
\end{aligned}$$

Exemple La famille $\big(X^2+3X+5, 2X^2+X, X^2\big)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

Démonstration C'est même une base de $\mathbb{R}_2[X]$ car $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\big(X^2+3X+5, 2X^2+X, X^2\big) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible.

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

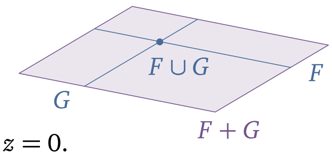
4.1 Définition et parties génératrices

Définition-théorème (Somme de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

L'ensemble $\displaystyle\sum_{i=1}^p F_i = F_1 + \ldots + F_p = \big\{ f_1 + \ldots + f_p \mid f_1 \in F_1, \ \ldots, \ f_p \in F_p \big\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Ce sous-espace vectoriel appelé la *somme de* $F_1, \ldots, F_p$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$. En d'autres termes, tout sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$ contient $F_1 + \ldots + F_p$.

Démonstration Il n'est pas dur de vérifier que $F_1 + \ldots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E. Précisons seulement pourquoi il contient F_i pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Or 0_E appartient à $F_1, \ldots, F_p$, donc pour tout $f_i \in F_i$: $f_i = 0_E + \ldots + 0_E + f_i + 0_E + \ldots + 0_E \in F_1 + \ldots + F_p$.



Attention ! Ne confondez pas somme et réunion ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.

Exemple Les droites $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big)$ ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.

Démonstration $$F + G = \Big\{(x,0,0) \mid \ x \in \mathbb{R}\Big\} + \Big\{(0,y,0) \mid \ y \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(x,0,0) + (0,y,0) \mid \ x,y \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(x,y,0) \mid \ x,y \in \mathbb{R}\Big\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Théorème (Parties génératrices d'une somme de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E et $X_1, \ldots, X_p$ des parties de E. Alors $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} X_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(X_i)$.
Par conséquent, si X_i engendre F_i pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, alors $X_1 \cup \ldots \cup X_p$ engendre $F_1 + \ldots + F_p$.

Démonstration Pour commencer, $\mathrm{Vect}(X_1 \cup \ldots \cup X_p)$ est un sous-espace vectoriel contenant $X_1, \ldots, X_p$, il contient donc $\mathrm{Vect}(X_1), \ldots, \mathrm{Vect}(X_p)$, donc aussi $\mathrm{Vect}(X_1) + \ldots + \mathrm{Vect}(X_p)$. Inversement, $\mathrm{Vect}(X_1) + \ldots + \mathrm{Vect}(X_p)$ est un sous-espace vectoriel contenant $\mathrm{Vect}(X_1), \ldots, \mathrm{Vect}(X_p)$, il contient donc $X_1, \ldots, X_p$, donc aussi $X_1 \cup \ldots \cup X_p$, donc aussi $\mathrm{Vect}(X_1 \cup \ldots \cup X_p)$.

4.2 Somme directe

En général, les vecteurs d'une somme $F_1 + \ldots + F_p$ peuvent être écrits de bien des manières sous la forme $f_1 + \ldots + f_p$ avec $f_1 \in F_1, \ldots, f_p \in F_p$. Par exemple, pour deux sous-espaces vectoriels F et G, tout vecteur x de $F \cap G$ peut être écrit $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ et ces écritures sont distinctes si $x \neq 0_E$.

Définition (Sous-espaces vectoriels en somme directe) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont *en somme directe* si la décomposition d'un vecteur de $F_1 + \ldots + F_p$ comme somme de vecteurs de $F_1, \ldots, F_p$ est toujours unique, ce qui revient à dire que :
$$\forall (f_1, \ldots, f_p), (f_1', \ldots, f_p') \in F_1 \times \ldots \times F_p, \qquad \Big(f_1 + \ldots + f_p = f_1' + \ldots + f_p' \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1,p]\!], \ \ f_i = f_i'\Big).$$
Il est équivalent d'exiger que l'égalité $0_E = 0_E + \ldots + 0_E$ soit la seule décomposition de 0_E comme somme de vecteurs de $F_1, \ldots, F_p$: $\qquad \forall (f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, \qquad \Big(f_1 + \ldots + f_p = 0_E \quad \Longrightarrow \quad f_1 = \ldots = f_p = 0_E\Big)$.
Le cas échéant, la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est notée $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ou $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

Le petit rond qu'on ajoute à la notation $F_1 + \ldots + F_p$ pour indiquer que la somme est directe ne fait pas de $F_1 + \ldots + F_p$ et $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ des ensembles différents, il dévoile seulement une information d'unicité en plus.

Démonstration Pour l'équivalence des deux définitions, poser $f_1' = \ldots = f_p' = 0_E$ dans un sens et remplacer f_i par $f_i - f_i'$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ dans l'autre.

Les concepts de somme directe et de liberté se ressemblent beaucoup et ce n'est pas sans raison. En termes simples — mais peu rigoureux, attention — des vecteurs sont linéairement indépendants quand ils sont écartés radicalement les uns des autres. De même, des sous-espaces vectoriels sont en somme directe quand ils sont écartés radicalement les uns des autres. Pour deux sous-espaces vectoriels, la caractérisation suivante le dit très clairement.

Théorème (Caractérisation de la somme directe pour deux sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont en somme directe. (ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

✖ **Attention !** Il est faux que $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe si et seulement si $F_1\cap\dots\cap F_p=\{0_E\}$, ou bien si et seulement si $F_i\cap F_j=\{0_E\}$ pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$ distincts. À partir de trois sous-espaces vectoriels, on en reste à la définition. Par exemple, les droites $\mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$, $\mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ sont deux à deux d'intersection triviale, mais à trois, elles ne sont pas en somme directe car $(1,0)+(0,1)+(-1,-1)=(0,0)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si F et G en somme directe, alors pour tout $x\in F\cap G$: $x=\overbrace{x}^{\in F}+\overbrace{0_E}^{\in G}=\overbrace{0_E}^{\in F}+\overbrace{x}^{\in G}$, donc $x=0_E$ par définition de la somme directe.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Faisons l'hypothèse que $F\cap G=\{0_E\}$. Soient $f,f'\in F$ et $g,g'\in G$. Si $f+g=f'+g'$, alors $f-f'=g'-g\in F\cap G=\{0_E\}$, donc $f=f'$ et $g=g'$. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \ x+y+z=0\big\}$ et la droite $G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \ x=y=z\big\}$ sont en somme directe.

Démonstration Pour commencer, F et G sont des ensembles de solutions de systèmes linéaires homogènes, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $F\cap G=\big\{(0,0,0)\big\}$. Pour tout $(x,y,z)\in F\cap G$: $x+y+z=0$ et $x=y=z$, donc clairement $x=y=z=0$, i.e. $(x,y,z)=(0,0,0)$.

■ **Théorème (Somme directe et liberté)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E et $I=J\sqcup K$ une partition de I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

(ii) $(x_j)_{j\in J}$ et $(x_k)_{k\in K}$ sont libres et $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ et $\mathrm{Vect}(x_k)_{k\in K}$ sont en somme directe.

Le résultat se généralise au cas d'une partition finie quelconque $I=I_1\sqcup\dots\sqcup I_p$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons $(x_i)_{i\in I}$ libre. Toute sous-famille d'une famille libre étant libre, il nous suffit de montrer que $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ et $\mathrm{Vect}(x_k)_{k\in K}$ en somme directe. Soient $y\in\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ et $z\in\mathrm{Vect}(x_k)_{k\in K}$ deux vecteurs pour lesquels $y+z=0_E$. Ainsi, $y=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$ et $z=\sum_{k\in K}\mu_k x_k$ pour certaines familles presque nulles de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J}\in\mathbb{K}^J$ et $(\mu_k)_{k\in K}\in\mathbb{K}^K$, donc $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j+\sum_{k\in K}\mu_k x_k=0_E$, donc $\lambda_j=\mu_k=0$ pour tous $j\in J$ et $k\in K$ par liberté de $(x_i)_{i\in I}$. Conclusion : $y=z=0_E$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons $(x_j)_{j\in J}$ et $(x_k)_{k\in K}$ libres et $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ et $\mathrm{Vect}(x_k)_{k\in K}$ en somme directe et montrons que $(x_i)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$ une famille presque nulle de scalaires pour laquelle $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E$. Ainsi $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j+\sum_{k\in K}\lambda_k x_k=0_E$, donc $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j=0_E$ et $\sum_{k\in K}\lambda_k x_k=0_E$ par somme directe, puis $\lambda_j=\lambda_k=0$ pour tous $j\in J$ et $k\in K$ par liberté. Conclusion : $\lambda_i=0$ pour tout $i\in I$. ■

■ **Théorème (Base adaptée et dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

(i) **Base adaptée à une somme directe :** Si F_i possède une base $\mathscr{B}_i$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ et si $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe, la concaténation des bases $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p$ est une base de $F_1\oplus\dots\oplus F_p$ qu'on dit *adaptée à la décomposition* $F_1\oplus\dots\oplus F_p$.

(ii) **Dimension d'une somme :** Si $F_1,\dots,F_p$ sont de dimension finie, alors $F_1+\dots+F_p$ est de dimension finie et :
$\dim\sum_{i=1}^p F_i\leqslant\sum_{i=1}^p\dim F_i$, avec égalité si et seulement si $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe.
Ainsi, en cas de somme directe : $\dim\bigoplus_{i=1}^p F_i=\sum_{i=1}^p\dim F_i$.

Démonstration

(i) La concaténation des bases $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p$ engendre $F_1+\dots+F_p$ et l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) du théorème précédent montre qu'elle est libre.

(ii) Donnons-nous pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ une base finie $\mathscr{B}_i$ de F_i. Leur concaténation $\mathscr{C}$ est une famille génératrice finie de $F_1 + \ldots + F_p$, donc $F_1 + \ldots + F_p$ est de dimension finie inférieure à $\dim F_1 + \ldots + \dim F_p$. En outre, cette inégalité de dimensions est une égalité si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre, i.e. si et seulement si $F_1 = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1), \ldots, F_p = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_p)$ sont en somme directe d'après le théorème précédent.

Terminons ce paragraphe par un mot rapide sur l'*associativité* de la somme directe. Par exemple :

$$\begin{cases} F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont en somme directe} \\ F_1 + F_2 \text{ et } F_3 \text{ sont en somme directe} \end{cases} \iff F_1,\ F_2 \text{ et } F_3 \text{ sont en somme directe,}$$

donc en résumé : $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = (F_1 \oplus F_2) \oplus F_3$. Je n'en dirai pas plus, vous avez compris l'idée.

4.3 Supplémentaires

Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

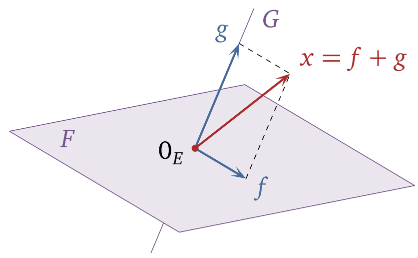
(i) Tout vecteur de E est d'une et une seule manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E, \quad \exists!\, (f,g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

(ii) $E = F \oplus G$, ce qui revient à dire que $E = F + G$ et que F et G sont en somme directe.

Le cas échéant, on dit que F et G sont *supplémentaires dans E*. On dit aussi que F est UN *supplémentaire de G dans E*.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si leur somme couvre E et s'ils sont écartés radicalement l'un de l'autre, i.e. si leur somme est la plus grande possible et leur intersection la plus petite possible. La figure ci-contre en 3 dimensions offre une illustration conceptuelle très satisfaisante de la supplémentarité en toute dimension. Dessinez sans modération !

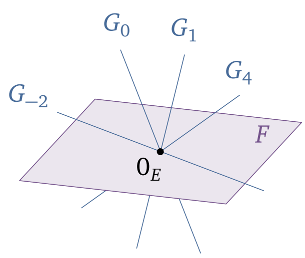


Attention !

- Somme directe et supplémentarité sont deux notions distinctes.
  Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E possède AU PLUS UNE décomposition $f+g$. Le cas échéant, les vecteurs de $F+G$ ont exactement une décomposition $f+g$ et les éléments de $E \setminus (F+G)$ n'en ont pas. Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est ajouter l'égalité $E = F+G$ à la somme directe, de sorte que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition $f+g$.
- On ne dit jamais « LE supplémentaire », faute d'unicité. Plus précisément, seuls E et $\{0_E\}$ possèdent un seul supplémentaire. Un exemple ci-dessous illustre cette remarque.
- Supplémentaire et complémentaire n'ont vraiment rien de commun. Les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel sont nombreux et ce sont des sous-espaces vectoriels. Au contraire, le complémentaire est unique et ce n'est jamais un sous-espace vectoriel car il ne contient même pas le vecteur nul.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, deux droites vectorielles non confondues sont toujours supplémentaires. De même, dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans ce plan sont toujours supplémentaires.

Exemple Pour tout $\varepsilon \neq -2$, la droite $G_\varepsilon = \mathrm{Vect}\big((1,\varepsilon,1)\big)$ est un supplémentaire de $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x+y+z=0\big\}$ dans $\mathbb{R}^3$.



Démonstration Soit $\varepsilon \neq -2$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que (x,y,z) est d'une unique manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G_ε. Pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{matrix} (x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(1,\varepsilon,1) \\ \text{et} \quad (a,b,c) \in F \end{matrix} \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \varepsilon\lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & + & \lambda & = & x \\ & b & & + & \varepsilon\lambda & = & y \\ & & c & + & \lambda & = & z \\ & & & & (2+\varepsilon)\lambda & = & x+y+z. \end{array}\right.$$

$$L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 - L_4$$

Comme $\varepsilon \neq -2$, ce système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls possède une et une seule solution.

Exemple $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Nous voulons montrer ceci : $\exists!\,(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}),\quad M = S + A.$

- **Analyse :** Soient $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Si $M = S+A$, alors $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$, donc par demi-somme et demi-différence : $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$.
- **Synthèse :** Posons $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$. Alors $M = S+A$, et par ailleurs, S est symétrique et A antisymétrique car $S^\top = \left(\dfrac{M+M^\top}{2}\right)^\top = \dfrac{M^\top+M}{2} = S$ et $A^\top = \left(\dfrac{M-M^\top}{2}\right)^\top = \dfrac{M^\top-M}{2} = -A$.

Exemple Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n : $\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $A\mathbb{K}[X] = \big\{AQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

Démonstration Il s'agit de montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\quad \exists!\,(Q,R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X],\quad P = AQ + R.$ C'est ni plus ni moins le théorème de la division euclidienne recuisiné à la sauce linéaire.

Mais au fait, un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? La réponse est oui en dimension finie et nous le montrons ci-dessous. En dimension infinie, la réponse est oui aussi, mais la preuve requiert un axiome que vous ne connaissez pas — le sulfureux *axiome du choix*.

Théorème (Existence de supplémentaires en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E.

En outre, les supplémentaires de F dans E ont tous pour dimension $\dim E - \dim F$.

Démonstration De même que E, F est de dimension finie, donc possède une base $(e_1, \ldots, e_p)$ que nous pouvons compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E d'après le théorème de la base incomplète — avec éventuellement p ou n nul. Posons $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Il découle des théorèmes précédents que $E = F + G$ et que F et G sont en somme directe, i.e. que F et G sont supplémentaires dans E. A fortiori : $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple $\mathrm{Vect}\big(X, X^3\big)$ est un supplémentaire de $F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\Big\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Démonstration Comme dans la preuve précédente !

- Nous avons besoin d'abord d'une base de F. Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:
$$P \in F \iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d$$
$$\iff \begin{cases} a = -a \\ 3a+b = 3a+b \\ 3a+2b+c = -3a-2b-c \\ a+b+c+d = a+b+c+d \end{cases} \quad \text{après identification des coefficients} \quad \iff \quad a = 0 \quad \text{et} \quad 2b + c = 0.$$
Ce calcul montre que $\big(1, X^2 - 2X\big)$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base de F.
- Complétons-la en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec certains vecteurs de la base canonique. Échelonnée en degré, la famille $\big(1, X^2-2X, X, X^3\big)$ est libre, et composée de 4 vecteurs alors que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion : $\mathrm{Vect}\big(X, X^3\big)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

4.4 La formule de Grassmann

Théorème (Formule de Grassmann) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. La somme $F + G$ est elle aussi de dimension finie et :
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration Comme F et G sont de dimension finie, nous pouvons nous donner un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F et un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G. Ainsi, tout vecteur de $F+G$ est une somme de vecteurs de $F \cap G$, F' et G', donc $F + G = (F \cap G) + F' + G'$. Montrons maintenant que $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

Soient $x \in F \cap G$, $f' \in F'$ et $g' \in G'$ trois vecteurs pour lesquels $x + f' + g' = 0_E$. Ainsi $g' = -x - f' \in F \cap G$, donc $f' = -x - g' \in (F \cap G) \cap F' = \big\{0_E\big\}$ car $F \cap G$ et F' sont en somme directe. Bref, $f' = 0_E$ donc $x + g' = 0_E$, donc $x = g' = 0_E$ car $F \cap G$ et G' sont en somme directe, ce qui achève de montrer que $F \cap G$, F' et G' sont en somme directe. Conclusion :

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= \dim(F\cap G) + \dim F' + \dim G' = \dim(F\cap G) + \big(\dim F - \dim(F\cap G)\big) + \big(\dim G - \dim(F\cap G)\big)\\ &= \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).\end{aligned}$$

Théorème (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On s'intéresse aux trois assertions suivantes :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$. (ii) $F \cap G = \{0_E\}$. (iii) $F + G = E$.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux de ces trois assertions sont vraies. Le cas échéant, la troisième est automatiquement vraie.

Démonstration Notons $\bigstar$ la formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

(i) et (ii) $\Longrightarrow$ (iii) D'après $\bigstar$, $\dim(F+G) = \dim E$ avec $F + G \subset E$, donc $F + G = E$.

(ii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i) Simple conséquence d'$\bigstar$.

(iii) et (i) $\Longrightarrow$ (ii) D'après $\bigstar$, $\dim(F \cap G) = 0$ donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple $F = \mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big)$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x + 2y + 3z = 0\big\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration F est une droite vectorielle et $G = \big\{(-2y-3z, y, z) \mid \ y, z \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((-2,1,0),(-3,0,1)\big)$ un plan vectoriel, donc $\dim F + \dim G = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Par ailleurs $F \cap G = \big\{(0,0,0)\big\}$ — vérification facile — donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.