Limites et continuité

Dans ce chapitre, E et F sont des parties quelconques de $\mathbb{R}$, pas forcément des intervalles, et $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les notions de limite et de continuité seront présentées dans le cadre usuel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, mais bon nombre de définitions et de résultats s'étendent sans difficulté aucune aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1 Limite d'une fonction en un point

Au chapitre « Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ », nous avons évité les voisinages de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$, mais dans ce paragraphe, les trublions reprennent du service. Ce retour en grâce rend la notation $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ ambiguë car depuis peu, $\overline{\mathbb{R}}$ désigne aussi l'adhérence de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pourtant celle-ci vaut simplement $\mathbb{R}$. Convenons donc une fois pour toutes que $\overline{\mathbb{R}}$ désignera toujours la droite réelle achevée $\mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ dans ce chapitre.

Pour une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$, on dira que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est *adhérent à A* si A rencontre tout voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), i.e. si A contient des réels aussi grands (resp. petits) qu'on veut. Par exemple, $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.

Nous allons définir dans un premier temps la notion de limite en un point d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous généraliserons dans un deuxième temps le travail effectué aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

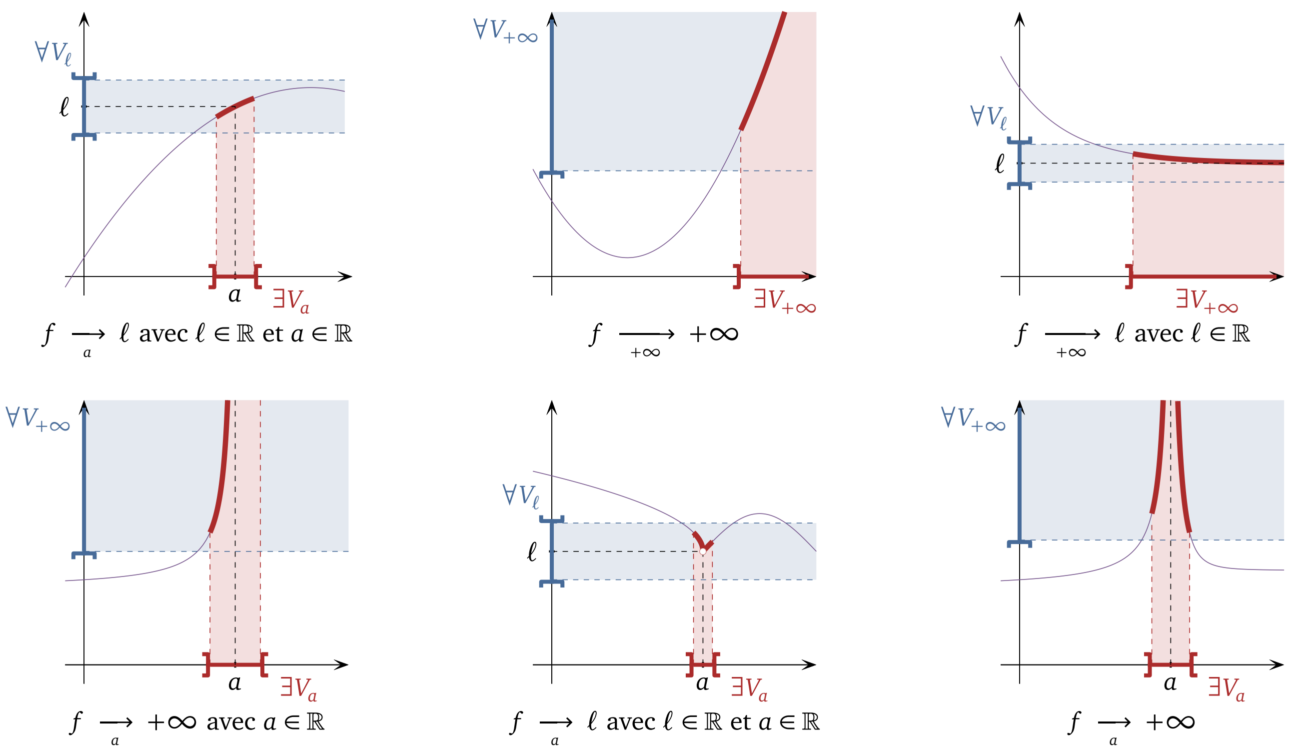
1.1 Définition

Définition (Limite d'une fonction en un point) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{E}$ (ou $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$) et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a*, ce qu'on note $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(\ell), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad f(E \cap V_a) \subset V_\ell.$$

i.e. si : $\quad \forall V_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(\ell), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall x \in E \cap V_a, \quad f(x) \in V_\ell$

à condition de noter $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(s)$ l'ensemble des voisinages de r dans $\mathbb{R}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.



$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ — $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ — $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$

$f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$ — $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ — $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$

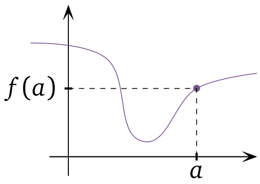
Théorème **(Unicité de la limite)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{E}$ (ou $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$).

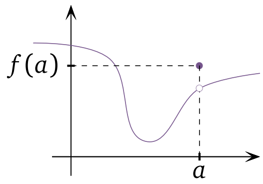
(i) Si f possède une limite en a, cette limite est unique et notée $\lim\limits_a f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

(ii) Si f est définie en a et y possède une limite, alors forcément : $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$.

Pour l'assertion (ii) :

f est définie en a
et $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$.





f est définie en a
mais f n'a pas de limite en a.

Nous verrons cela dit que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.

Démonstration

(i) Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On veut montrer, sous l'hypothèse que f admet ℓ et ℓ' pour limites en a, que $\ell = \ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' pour lesquels $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$. Or par hypothèse sur f, il existe deux voisinages V_a et V_a' de a pour lesquels $f(E \cap V_a) \subset V_\ell$ et $f(E \cap V_a') \subset V_{\ell'}$. Pourtant, a est adhérent à E et $V_a \cap V_a'$ est un voisinage de a, donc $E \cap V_a \cap V_a' \neq \varnothing$. Il en découle que $f(E \cap V_a \cap V_a') \subset V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ — contradiction !

(ii) Faisons l'hypothèse que f est définie en a et possède une limite ℓ en a. Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe alors un voisinage V_a de a pour lequel $f(E \cap V_a) \subset V_\ell$. En particulier, $f(a)$ appartient à TOUT voisinage de ℓ car f est définie en a. Comme $\big]f(a), +\infty\big[$ et $\big]-\infty, f(a)\big[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement ne contenant pas $f(a)$, il en découle que $\ell \in \mathbb{R}$. Finalement, $f(a)$ appartient au voisinage $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ de ℓ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\ell = f(a)$. Si vous n'êtes pas convaincus par ce « donc », supposez $\ell \neq f(a)$ et choisissez $\varepsilon = \big|f(a) - \ell\big|$.

Définition **(Les 9 limites)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{E}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rclllll}
f \underset{a}{\longrightarrow} \ell & \iff & \forall \varepsilon > 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in E, & |x - a| < \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon. \\
f \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty & \iff & \forall A > 0, & \exists B > 0, & \forall x \in E, & x > B \implies f(x) > A. \\
f \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty & \iff & \forall A < 0, & \exists B > 0, & \forall x \in E, & x > B \implies f(x) < A. \\
f \underset{-\infty}{\longrightarrow} +\infty & \iff & \forall A > 0, & \exists B < 0, & \forall x \in E, & x < B \implies f(x) > A. \\
f \underset{-\infty}{\longrightarrow} -\infty & \iff & \forall A < 0, & \exists B < 0, & \forall x \in E, & x < B \implies f(x) < A. \\
f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell & \iff & \forall \varepsilon > 0, & \exists B > 0, & \forall x \in E, & x > B \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon. \\
f \underset{-\infty}{\longrightarrow} \ell & \iff & \forall \varepsilon > 0, & \exists B < 0, & \forall x \in E, & x < B \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon. \\
f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty & \iff & \forall A > 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in E, & |x - a| < \alpha \implies f(x) > A. \\
f \underset{a}{\longrightarrow} -\infty & \iff & \forall A < 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in E, & |x - a| < \alpha \implies f(x) < A.
\end{array}$$

J'utiliserai généralement des inégalités strictes, mais vous avez le droit de préférer les inégalités larges.

Exemple $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration Montrons que : $\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \alpha \implies \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, minorons : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver α.

Or : $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A \iff |x-1| < \dfrac{1}{A^2}$, donc : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \dfrac{1}{A^2} \implies \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A$.

Exemple $\dfrac{x^2}{x^2+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration Montrons que : $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad x > B \implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, majorons : $\left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| = \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

Or pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\quad x > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon.$

Exemple $x^2 - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Démonstration Montrons que : $\forall A > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad x > B \implies x^2 - x > A.$

Soit $A > 0$. Pour tout $x \geqslant 2$, minorons : $x^2 - x = x(x-1) \geqslant x \times 1 = x$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\quad x > \max\{2, A\} \implies x^2 - x > A.$

Théorème (Limite finie et caractère localement borné) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{E}$ (ou $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$).

Si f possède une limite FINIE en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration Par hypothèse, il existe un voisinage V_a de a sur lequel $\big|f(x) - \ell\big| < 1$. Il en découle que f est bornée sur $E \cap V_a$ car pour tout $x \in E \cap V_a$: $\big|f(x)\big| = \big|f(x) - \ell + \ell\big| \leqslant \big|f(x) - \ell\big| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1$.

1.2 Limite à gauche, limite à droite

Définition-théorème (Limite à gauche/à droite d'une fonction) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Limite à gauche :** Si $a \in \overline{E \cap]-\infty, a[}$, on dit que f *possède une limite à gauche en* a si $f|_{E\cap]-\infty,a[}$ possède une limite en a. Cette limite est notée $\lim\limits_{a^-} f$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

$$\begin{array}{lclllll}
f \xrightarrow[a^-]{} \ell & \iff & \forall \varepsilon > 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in E, & a - \alpha < x < a & \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon. \\
f \xrightarrow[a^-]{} +\infty & \iff & \forall A > 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in E, & a - \alpha < x < a & \implies f(x) > A. \\
f \xrightarrow[a^-]{} -\infty & \iff & \forall \varepsilon > 0, & \exists \alpha < 0, & \forall x \in E, & a - \alpha < x < a & \implies f(x) < A.
\end{array}$$

- **Limite à droite :** On définit de même la notion de *limite à droite* à partir de la fonction restreinte $f|_{E\cap]a,+\infty[}$ si $a \in \overline{E \cap]a, +\infty[}$. En termes de quantificateurs, remplacez simplement $a - \alpha < x < a$ par $a < x < a + \alpha$.

Les limites à gauche/à droite sont uniques car ce ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions.

Exemple $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Démonstration Soit $A > 0$. Nous cherchons un réel $\alpha > 0$ pour lequel pour tout $x \in]0, \alpha[$: $\dfrac{1}{x} > A$.

Or pout tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} > A \iff x < \dfrac{1}{A}$, donc nous pouvons donc choisir $\alpha = \dfrac{1}{A}$.

On montre de même que $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, mais d'après le théorème qui suit, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Théorème (Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{E \cap]-\infty, a[} \cap \overline{E \cap]a, +\infty[}$.

(i) Si f est définie en a : $\quad f \xrightarrow[a]{} \ell \iff f \xrightarrow[a^-]{} \ell$ et $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$ $\boxed{\text{ET} \quad f(a) = \ell.}$

(ii) Si f n'est pas définie en a : $\quad f \xrightarrow[a]{} \ell \iff f \xrightarrow[a^-]{} \ell$ et $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$.

Pour bien comprendre la condition « et $f(a) = \ell$ » de l'assertion (i), jetez un œil aux deux figures du haut de la page 2.

Démonstration Montrons seulement (i).

- Si $f \xrightarrow[a]{} \ell$, nous savons déjà que $\ell = f(a)$ et les égalités $f \xrightarrow[a^-]{} \ell$ et $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$ découlent d'une simple restriction du domaine à $E \cap]-\infty, a[$ et $E \cap]a, +\infty[$ dans la définition de la limite.

- Réciproquement, faisons l'hypothèse que $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$, $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(a) = \ell$. En particulier, $\ell \in \mathbb{R}$ et nous voulons montrer que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des réels $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ pour lesquels pour tout $x \in E$: $a-\alpha^- < x < a \implies \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$ et : $a < x < a+\alpha^+ \implies \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$. Posons $\alpha = \min\left\{\alpha^-, \alpha^+\right\}$. Comme $f(a) = \ell$, il est aussitôt clair que pour tout $x \in E$: $|x-a| < \alpha \implies \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$.

Exemple Si on note f la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration Trois raisons : $1-x \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$, $\mathrm{e}^x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $f(0) = 1$.

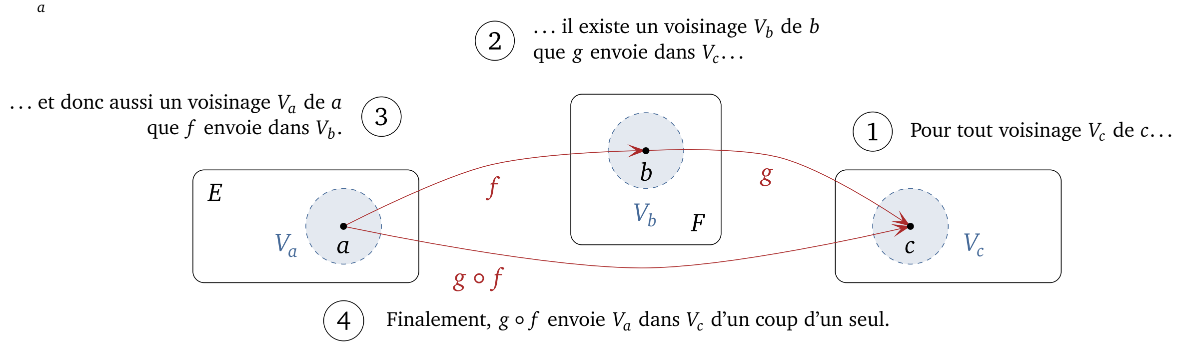
1.3 Opérations sur les limites de fonctions

Il se passe avec les fonctions la même chose qu'avec les suites quand on les additionne, qu'on les multiplie et qu'on les inverse — en particulier, mêmes formes indéterminées. Refaites un tour du côté des suites !

Théorème (Composition de limites) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$), $b \in \overline{F}$ (éventuellement $b = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à F, et idem avec $-\infty$) et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } f \underset{a}{\longrightarrow} b \text{ et } g \underset{b}{\longrightarrow} c, \text{ alors } g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} c.$$

Démonstration Soit V_c un voisinage de c. Par hypothèse, il existe un voisinage V_b de b pour lequel $g(F \cap V_b) \subset V_c$ et un voisinage V_a de a pour lequel $f(E \cap V_a) \subset V_b$. Par composition, $g \circ f(E \cap V_a) \subset g(F \cap V_b) \subset V_c$, donc en effet $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} c$.



Exemple $\ln \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}+1}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration Simple composition des limites : $\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{y^2+1}{(y+1)^2} \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\ln z \underset{z \to 1}{\longrightarrow} 0$.

Attention ! Dans une limite, on ne peut pas remplacer $f(x)$ par ℓ au seul motif que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Rien ne garantit en toute généralité que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+\ell}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)^x = \lim_{x \to +\infty} \ell^x$. Ici, la première égalité est vraie mais la deuxième est fausse si $\ell = 1$ à cause de la forme indéterminée $1^{+\infty}$.

1.4 Passage à la limite dans une inégalité et opération inverse

Le résultat qui suit n'est qu'une application directe de la définition de la limite et doit être perçu comme tel.

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$), $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite ℓ en a et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < M$, alors $f(x) < M$ au voisinage de a. (ii) Si $\ell > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

Démonstration Prouvons (ii). Si $\ell = +\infty$, il existe un voisinage V_a de a pour lequel $f(E \cap V_a) \subset]m, +\infty[$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage V_a de a pour lequel $f(E \cap V_a) \subset]\ell-(\ell-m), \ell+(\ell-m)[\subset]m, +\infty[$ car $\ell - m > 0$. Dans les deux cas, $f(x) > m$ au voisinage de a.

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. Alors f est négative au voisinage de 0 à gauche et positive à droite.

Démonstration Par définition de la limite, $\dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{1}{2} > 0$ au voisinage de 0. Le résultat en découle après multiplication par x, qui est négatif à gauche de 0 et positif à droite.

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions possédant une limite finie en a. Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$.

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux fonctions est constante.

Attention ! C'est faux avec des inégalités strictes ! Par exemple, $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.

Démonstration Par l'absurde, si $\lim\limits_a (g - f) < 0$, le théorème précédent montre que $g(x) - f(x) < 0$ au voisinage de a — contradiction.

1.5 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Le théorème qui suit contient en particulier le théorème « Composition à gauche par une fonction » du chapitre « Suites réelles ». Nous l'utilisions jusqu'ici sans l'avoir démontré.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$) et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$. (ii) $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E de limite a.

Démonstration

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) Faisons l'hypothèse que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E une suite de limite a. Pour montrer que $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donnons-nous un voisinage V_ℓ de ℓ. Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage V_a de a pour lequel $f(E \cap V_a) \subset V_\ell$. Or $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, donc $u_n \in V_a$ à partir d'un certain rang N. Plus précisément, $u_n \in E \cap V_a$ pour tout $n \geqslant N$, donc $f(u_n) \in f(E \cap V_a) \subset V_\ell$. Comme voulu, $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) Au lieu de travailler avec des voisinages, travaillons pour changer dans le cas particulier où $a, \ell \in \mathbb{R}$. Par contraposition, supposons que f n'admet pas ℓ pour limite. Il existe alors un réel $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel :
$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x \in E, \qquad |x - a| < \alpha \ \text{ et } \ \big|f(x) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \bigstar.$$
En particulier, en choisissant $\alpha = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous héritons d'un élément u_n de E pour lequel $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $\big|f(u_n) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est à valeurs dans E et de limite a, et la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ pour limite.

Exemple $\ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n! \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\ln(n!) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration $n\pi \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais :
$$\sin(n\pi) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{et bien sûr } 1 \neq 0.$$

1.6 Théorème d'encadrement/minoration/majoration

Théorème Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : E \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**
Si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a avec $m \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $M \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) **Théorème de minoration :**
Si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a avec $m \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**
Si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a avec $M \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration Pour (i), soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V_a de a sur lequel $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$, un voisinage V_a' sur lequel $m(x) > \ell - \varepsilon$ et un voisinage V_a'' sur lequel $M(x) < \ell + \varepsilon$. Par intersection, $V_a \cap V_a' \cap V_a''$ est aussi un voisinage de a et $\ell - \varepsilon < m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) < \ell + \varepsilon$ pour tout $x \in E \cap V_a \cap V_a' \cap V_a''$, donc $\big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon$. ■

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante.

Théorème **(Produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{E}$ (éventuellement $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$).

Si f est bornée au voisinage de a et si $\varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 0$, alors $\varepsilon(x)f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

1.7 Théorème de la limite monotone

Théorème **(Théorème de la limite monotone)** Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

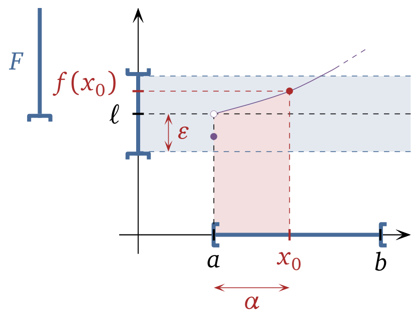
Dans le cas d'une fonction $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$, le théorème de la limite monotone affirme concrètement que :

— f possède une limite **finie** à droite en a, et de plus $f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$,

— pour tout $c \in]a,b[$, f possèdent des limites **finies** à gauche et à droite en c, et de plus $\lim\limits_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{c^+} f$,

— f possède une limite en b, soit finie soit $+\infty$.

Démonstration Montrons seulement que f possède une limite à droite en a dans le cadre proposé ci-dessus.



Par croissance de f, $f\big(]a,b[\big)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, donc possède une borne inférieure $\ell \in \mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne inférieure. En outre, $f(a) \leqslant \ell$.

Montrons que $f \underset{a^+ \to \ell}{\longrightarrow}$. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell + \varepsilon$ ne minore pas $f\big(]a,b[\big)$ car ℓ en est le plus grand minorant, donc $f(x_0) < \ell + \varepsilon$ pour un certain $x_0 \in]a,b[$. Posons $\alpha = x_0 - a > 0$. Pour tout $x \in]a,a+\alpha[$:

$$\ell - \varepsilon < \ell \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) = y_0 < \ell + \varepsilon,$$

car f est croissante d'une part et $\ell = \inf f\big(]a,b[\big)$ d'autre part.

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall x \in]a,a+\alpha[, \quad \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon,$ autrement dit $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$. ■

1.8 Extension aux fonctions complexes

Définition **(Limite d'une fonction en un point)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{E}$ (ou $a = +\infty$ si $+\infty$ est adhérent à E, et idem avec $-\infty$) et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a*, ce qu'on note $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad f(E \cap V_a) \subset V_\ell.$$

i.e. si : $\quad \forall V_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall x \in E \cap V_a, \quad f(x) \in V_\ell$

à condition de noter $\mathscr{V}_{\mathbb{K}}(s)$ l'ensemble des voisinages de s dans $\mathbb{K}$ pour tout $s \in \mathbb{K}$.

Le théorème d'unicité de la limite reste vrai et les versions epsilonesques de cette définition sont exactement les mêmes que dans le cas réel. Par exemple, si a et ℓ sont des réels :

$$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \qquad |x - a| < \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, toute limite de fonction complexe se ramène aisément à une limite de fonction réelle car pour tout $\ell \in \mathbb{C}$:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big|f(x) - \ell\big| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème **(Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$. $\qquad$ (ii) $\mathrm{Re}(f) \underset{a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f) \underset{a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\implies$ (ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \big|\mathrm{Re}(z)\big| \leqslant |z| \quad$ et $\quad \big|\mathrm{Im}(z)\big| \leqslant |z|, \quad$ donc…

(ii) $\implies$ (i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}, \quad$ donc…

Une fonction complexe qui possède une limite en un point est bornée au voisinage de ce point. Inutile de préciser « limite finie » ici car on ne manipule pas $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la limite également, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, mais sans $\pm\infty$.

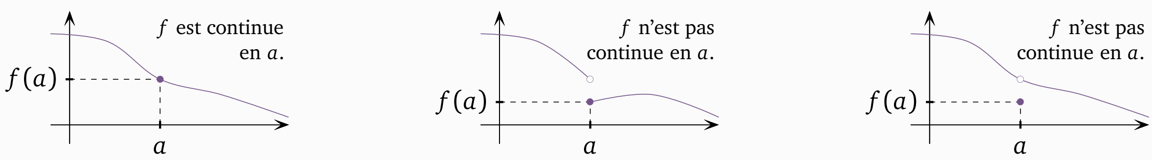
En revanche, le théorème d'encadrement/minoration/majoration et le théorème de la limite monotone n'ont aucun sens avec des fonctions complexes. Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$!

2 Continuité, point de vue local

2.1 Définitions

Définition **(Continuité en un point ou sur une partie)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in E$. On dit que f est *continue en a* si $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$, i.e. si : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \qquad |x - a| < \alpha \implies \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$

Cela dit, f étant définie en a, il est équivalent d'exiger que f possède une limite en a, celle-ci vaut forcément $f(a)$.



On dit enfin que f est *continue sur E* si elle l'est en tout point de E.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x - a|$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée, donc pour $\alpha = \varepsilon$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \alpha \implies \big||x| - |a|\big| < \varepsilon.$

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites.

Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in E$.

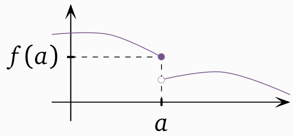
$$f \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } E\text{) si et seulement si } \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ le sont.}$$

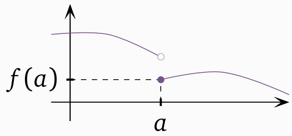
Exemple La fonction $t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions cosinus et sinus le sont.

Définition (Continuité à gauche/à droite en un point) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in E$.

- **Continuité à gauche :** On dit que f est *continue à gauche en a* si $f|_{E\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, i.e. si $f \underset{a^-}{\longrightarrow} f(a)$.
- **Continuité à droite :** On dit que f est *continue à droite en a* si $f|_{E\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, i.e. si $f \underset{a^+}{\longrightarrow} f(a)$.

f est continue à gauche en a, mais pas à droite.





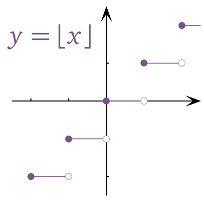
f est continue à droite en a, mais pas à gauche.

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites.

Théorème (Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in E$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

$$f \text{ est continue en } a \text{ si et seulement si } f \text{ est continue à gauche et à droite en } a.$$

Exemple La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue en tout point non entier, mais seulement continue à droite en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.



Démonstration Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n+1[$: $\lfloor x \rfloor = n \underset{x \to n^+}{\longrightarrow} n = \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue à droite en n. Au contraire, pour tout $x \in [n-1, n[$: $\lfloor x \rfloor = n-1 \underset{x \to n^-}{\longrightarrow} n-1 \neq \lfloor n \rfloor$, donc f n'est pas continue à gauche en n.

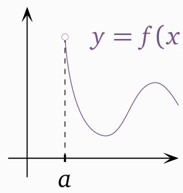
Attention ! Pour tout $x \in [0,1[$: $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $[0,1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $[0,1[$? Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0,1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 à gauche, i.e. à l'extérieur de $[0,1[$. Il est vrai que la restriction $\lfloor\cdot\rfloor|_{[0,1[}$ est continue sur $[0,1[$ tout entier, mais la fonction $\lfloor\cdot\rfloor$ n'est pas continue en 0, elle ne l'est que sur $]0,1[$.

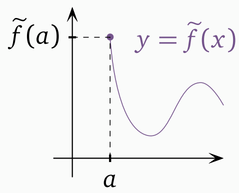
2.2 Prolongement par continuité en un point

Définition-théorème (Prolongement par continuité en un point) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \overline{E} \setminus E$. Ainsi, f n'est pas définie en a, mais a est adhérent à E.

On dit que f est *prolongeable par continuité en a* si f possède une limite finie en a. Le prolongement $\tilde{f}$ de f à $E \sqcup \{a\}$ obtenu en posant $\tilde{f}(a) = \lim_a f$ est alors continu en a.

On choisit généralement de noter encore f le prolongement $\tilde{f}$, i.e. d'identifier f et $\tilde{f}$.





Démonstration Montrons que $\tilde{f}$ est continue en a, i.e. que $\tilde{f} \underset{a}{\longrightarrow} \tilde{f}(a)$. Or par hypothèse, $f \underset{a}{\longrightarrow} \tilde{f}(a)$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|f(x) - \tilde{f}(a)\right| < \varepsilon.$$

C'est presque le résultat car f et $\tilde{f}$ coïncident sur E, mais pas tout à fait car $\tilde{f}$ est aussi définie en a. Cela dit, l'implication reste vraie pour $x = a$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E \sqcup \{a\}, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\right| < \varepsilon.$$

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car $x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0, mais comme $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0.
- Pour tout $\alpha > 0$: $\quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, $\quad$ donc en posant $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

2.3 Opérations sur la continuité

Que ce soit en un point ou sur un intervalle, toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sont continus. Même chose pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats ne sont jamais que la version continue d'un résultat analogue sur les limites.

Exemple La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration Attention, pour la composition, il faut bien préciser les domaines manipulés !

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$) et la fonction $x \longmapsto e^x$ l'est sur $\boxed{\mathbb{R}}$, donc par composition $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$ et $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

2.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a, i.e. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

(ii) $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E de limite a.

En résumé : Pour une fonction CONTINUE : $\quad f\Big(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \ldots}_{\ldots \text{ si la limite existe.}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(\ldots)$.

Nous avons déjà utilisé ce théorème dans le contexte des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Si une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

L'exemple suivant illustre l'idée que la caractérisation séquentielle de la continuité fait bon ménage avec la caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure.

Exemple Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f s'annule au moins une fois. L'ensemble $\big\{x \in [0,1] \mid \ f(x) = 0\big\}$ des zéros de f est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure s d'après la propriété de la borne supérieure. Rien n'indique a priori que f s'annule en s car s est une borne supérieure et non pas un maximum.

Cela dit, s est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de f d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité en s : $\quad f(s) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Conclusion : s est mieux qu'une borne supérieure, c'est le plus grand zéro de f.

Le résultat suivant illustre quant à lui l'idée que la caractérisation séquentielle de la continuité fait bon ménage avec la caractérisation séquentielle de la densité.

Théorème (Endomorphismes continus du groupe $\mathbb{R}$) Les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{R}$, i.e. les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour $f(x+y) = f(x)+f(y)$ tous $x, y \in \mathbb{R}$, sont exactement les fonctions linéaires $x \longmapsto \lambda x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration Les fonctions linéaires répondent bien sûr au problème. Réciproquement, soit f un endomorphisme continu de $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(nx) = nf(x) \quad \bigstar$.

- Posons $\lambda = f(1)$ et montrons que $f|_{\mathbb{Q}} = \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{Q}}$. Or pour tout $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$:
$$qf(r) \overset{\bigstar}{=} f(qr) = f(p) \overset{\bigstar}{=} pf(1) = \lambda p, \qquad \text{donc } f(r) = \lambda \frac{p}{q} = \lambda r.$$
- Montrons que $f = \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, x est la limite d'une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après la caractérisation séquentielle de la densité. Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité en x : $\quad f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda r_n = \lambda x.$

3 Continuité, point de vue global

La continuité est une *propriété locale* des fonctions car on la définit d'abord en un point avant de l'étendre à une partie point par point. Quelles conséquences un empilement de propriétés locales a-t-il à l'échelle globale d'une fonction donnée ?

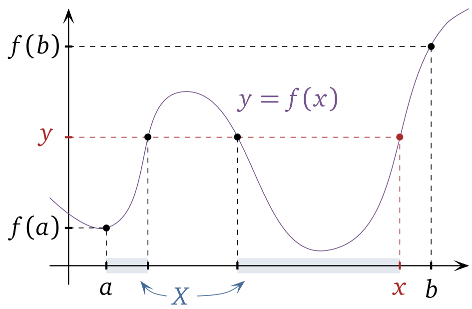
Sauf mention explicite du contraire, les fonctions de ce paragraphe sont à valeurs réelles.

3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI, version existence d'antécédents) Soient a et b deux réels pour lesquels $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f.

On dit souvent qu'une fonction est continue quand on peut la tracer sans lever le crayon, mais c'est le TVI qui le dit, ce n'est pas du tout immédiat sur la définition de la continuité en un point.

Démonstration (n°1) Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ sans perte de généralité et poser $X = \big\{t \in [a,b] \mid \ f(t) \leqslant y\big\}$.



L'ensemble X est majoré par b et contient a car $f(a) \leqslant y$, donc possède une borne supérieure x d'après la propriété de la borne supérieure. Montrons que $f(x) = y$ en prouvant successivement que $f(x) \leqslant y$ et $f(x) \geqslant y$. La figure ci-contre illustre le bien-fondé de cette démarche.

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, or $f(x_n) \leqslant y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité :
$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant y.$$

Si $x = b$, alors $f(x) = f(b) \geqslant y$ par hypothèse. Si au contraire $x < b$, alors $x + \dfrac{1}{n}$ appartient à $[a,b]$ à partir d'un certain rang, mais pas à X donc $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) > y$, donc après passage à la limite et utilisation de la continuité de f en x : $\quad f(x) \geqslant y$.

Démonstration (n°2, par dichotomie) Ici aussi, on suppose que $f(a) \leqslant f(b)$ et on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. À partir de l'intervalle $[a_0, b_0] = [a,b]$, on construit par récurrence de nouveaux intervalles intéressants plus petits $[a_1,b_1], [a_2,b_2]\ldots$ Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait déjà construit des réels $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n$ pour lesquels :

(i) $\quad a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \qquad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b \qquad$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$,

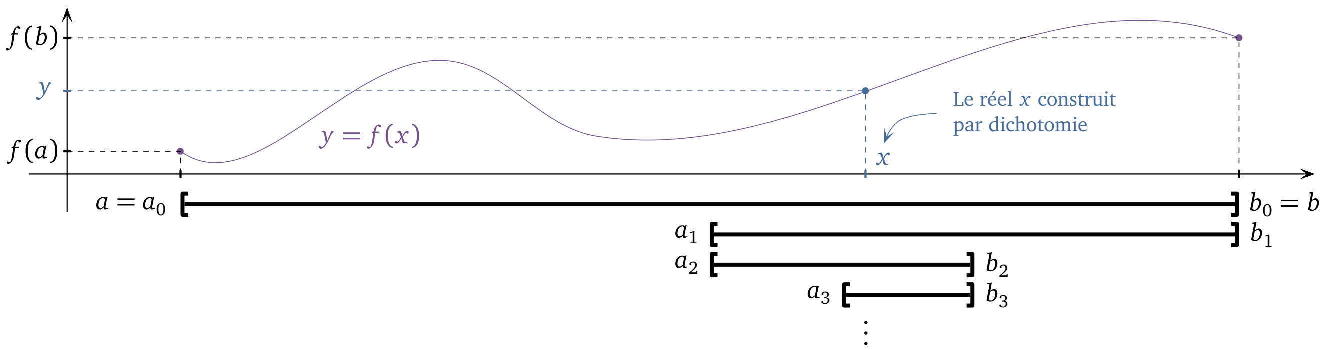
(ii) $\quad$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad f(a_k) \leqslant y \leqslant f(b_k)$.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{et} \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y. \end{cases}$$

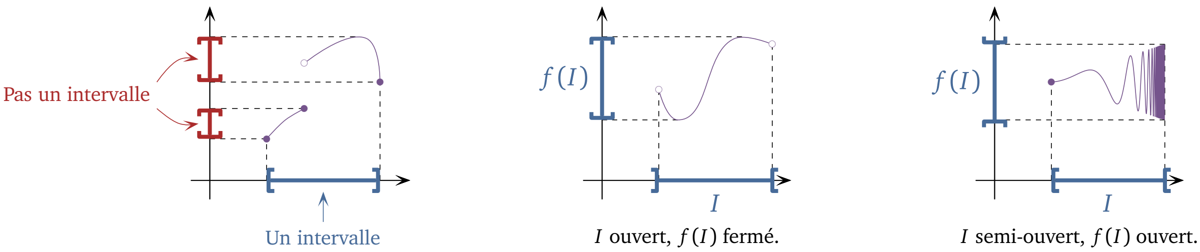
Je vous laisse vérifier seuls que ces réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions (i) et (ii) au rang $n+1$, faites-le !

Après cela, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ainsi adjacentes d'après (i), donc possèdent une limite finie commune $x \in [a,b]$. Or si nous passons à la limite dans (ii), la caractérisation séquentielle de la continuité montre que $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, i.e. que $y = f(x)$.



Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI, version image d'un intervalle) Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ et tout intervalle I inclus dans E, $f(I)$ est aussi un intervalle.

Attention ! Cette version nouvelle du TVI ne garantit pas que les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature. Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, etc.



I ouvert, $f(I)$ fermé. I semi-ouvert, $f(I)$ ouvert.

Démonstration Soient $f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ et I un intervalle inclus dans E. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, donnons-nous deux réels $u,v \in f(I)$ pour lesquels $u \leqslant v$, puis $y \in [u,v]$, et montrons que $y \in f(I)$. Par hypothèse, $u = f(a)$ et $v = f(b)$ pour certains $a,b \in I$ et f est définie sur tout le segment d'extrémités a et b car I est un intervalle. La version précédente du TVI montre alors que y possède un antécédent par f compris entre a et b, donc élément de I. Comme voulu, $y = f(x) \in f(I)$.

Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous nous contenterons de deux versions du théorème, mais vous pouvez en inventer d'autres !

(i) Toute fonction continue et strictement croissante $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective de $[a,b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$.

(ii) Toute fonction continue et strictement décroissante $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective de $[a,b[$ sur $\big]\lim\limits_{b^+} f, f(a)\big]$.

Démonstration Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a,b[$, f est bijective de $[a,b[$ sur son image $f\big([a,b[\big)$ mais a-t-on bien $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$? En tout cas, $f\big([a,b[\big)$ est un intervalle d'après le TVI.

Ensuite, $f(a) \in f\big([a,b[\big)$ et $f(a)$ minore $f\big([a,b[\big)$ par croissance de f, donc $f(a) = \min f\big([a,b[\big)$.

À présent, $f \underset{b^-}{\longrightarrow} \sup f\big([a,b]\big)$ d'après le théorème de la limite monotone, donc $f\big([a,b[\big)$ est l'un des intervalles $\big[f(a), \lim_{b^-} f\big]$ ou $\big[f(a), \lim_{b^-} f\big[$. Cela dit, la limite $\lim_{b^-} f$ peut-elle appartenir à $f\big([a,b[\big)$? Il existerait dans ce cas un réel $x \in [a,b[$ pour lequel $f(x) = \lim_{b^-} f$ et f serait constante de valeur $\lim_{b^-} f$ sur $[x,b[$, mais cela contredirait la stricte croissance de f. Conclusion : $\lim_{b^-} f \notin f\big([a,b[\big)$, donc $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim_{b^-} f\big[$.

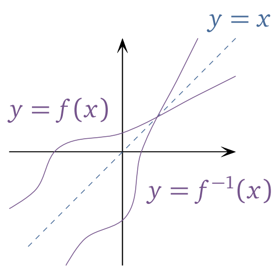
3.2 Continuité d'une réciproque

Théorème **(Continuité d'une réciproque)** Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On note J l'intervalle $f(I)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est strictement monotone sur I. (ii) f injective sur I — donc bijective de I sur J.

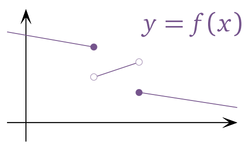
Le cas échéant, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.

Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$, « donc » si on peut tracer f sans lever le crayon, on peut faire de même avec f^{-1}.



Attention ! Le moindre point de discontinuité ruine la validité de l'implication :

Injective $\implies$ Strictement monotone.



Démonstration

- Pour l'équivalence des assertions (i) et (ii), nous savons déjà que (i) implique (ii) sans hypothèse de continuité. Pour la réciproque, fixons deux points $a, b \in I$ quelconques pour lesquels $a < b$. Ainsi, $f(a) \neq f(b)$ par injectivité, donc quitte à remplacer f par $-f$, qui est tout autant continue et injective que f, nous pouvons supposer $f(a) < f(b)$ sans perte de généralité. Montrons que f est strictement croissante.

  Soient $x, y \in I$ deux réels pour lesquels $x < y$. Par injectivité de f, $f(x) \neq f(y)$ mais rien ne garantit a priori que $f(x) < f(y)$. En d'autres termes, rien ne garantit que f ordonne $f(x)$ et $f(y)$ de la même manière qu'elle ordonne $f(a)$ et $f(b)$. À charge pour nous de comprendre en quoi la continuité et l'injectivité de f obligent f à adopter la même attitude dans les deux cas.

  Lorsque λ croît de 0 à 1, le réel $(1-\lambda)a + \lambda x$ varie de a à x tandis que $(1-\lambda)b + \lambda y$ varie de b et y. En outre, I étant un intervalle, les réels ainsi produits appartiennent tous à I, sur lequel f est définie. Par conséquent, la fonction $\lambda \overset{\varphi}{\longmapsto} f\big((1-\lambda)b + \lambda y\big) - f\big((1-\lambda)a + \lambda x\big)$ est bien définie sur $[0,1]$, mais d'où sort-elle ?

  — Pour commencer, $\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0$ et nous cherchons le signe de $\varphi(1) = f(y) - f(x)$.

  — Ensuite, φ est continue sur $[0,1]$ car f l'est.

  — Montrons enfin que φ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Or pour tout $\lambda \in [0,1]$, si $\varphi(\lambda) = 0$, alors par injectivité de f : $(1-\lambda)a + \lambda x = (1-\lambda)b + \lambda y$, donc $\underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0}\underbrace{(b-a)}_{>0} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0}\underbrace{(y-x)}_{>0} = 0$, et il en découle que $1-\lambda = \lambda = 0$ — contradiction.

  Il est maintenant clair, d'après le TVI, que φ est strictement positive sur $[0,1]$ tout entier. En particulier, $\varphi(1) = f(y) - f(x) > 0$.

- Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons à présent supposer f strictement croissante sur I sans perte de généralité. Ainsi, f est bijective de I sur son image J — un intervalle d'après le TVI — et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est croissante sur J.

  Soit $b \in J$. Sous l'hypothèse que f^{-1} est définie au voisinage de b à gauche, montrons que f^{-1} est continue à gauche en b — on ferait pareil à droite. D'après le théorème de la limite monotone, f^{-1} possède une limite ℓ en b à gauche. Par ailleurs, $f(x) \underset{x \to \ell}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité en ℓ, donc par composition : $f\big(f^{-1}(y)\big) \underset{y \to b^-}{\longrightarrow} f(\ell)$, mais $f\big(f^{-1}(y)\big) = y \underset{y \to b^-}{\longrightarrow} b$, donc $f(\ell) = b$ par unicité de la limite, et enfin $\ell = f^{-1}(b)$, ce qui achève de montrer que f^{-1} est continue en b à gauche.

Exemple En début d'année, l'existence des fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque. Voyons cela sur un exemple. Ingrédient majeur — le théorème de la limite monotone.

Exemple Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$ et $f^{-1} \underset{\ell}{\longrightarrow} +\infty$. Curieusement, c'est faux sans continuité, mais saurez-vous trouver un contre-exemple ?

Démonstration D'après le TVI strictement monotone, f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$. Ensuite, f^{-1} étant croissante, elle possède une limite L d'après le théorème de la limite monotone.

Ainsi, $f^{-1}\big(f(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$ par composition, mais par ailleurs $f^{-1}\big(f(x)\big) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $L = +\infty$.

3.3 Le théorème des bornes atteintes

Le théorème qui suit est valable pour des fonctions complexes.

Théorème (Image d'un compact par une fonction continue) Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(E, \mathbb{K})$ et tout compact C inclus dans E, $f(C)$ est un compact.

Démonstration Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(C)$. Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente de limite un élément de $f(C)$. En tout cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$ pour un certain $x_n \in C$. Or C étant compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in C$. Par continuité de f en ℓ, il en découle que $y_{\varphi(n)} = f\big(x_{\varphi(n)}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

Exemple L'image du compact $[0, 2\pi]$ par la fonction continue $t \longmapsto e^{it}$ est un compact. Bah oui, c'est $\mathbb{U}$!

Retour aux fonctions réelles avec un ultime théorème fondamental.

Théorème (Théorème des bornes atteintes) Deux versions équivalentes.

(i) Toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est bornée et atteint ses bornes.

(ii) L'image d'un **SEGMENT** par une fonction continue est un **SEGMENT**.

La continuité ne préserve pas la forme des intervalles en général... sauf si les intervalles en jeu sont des segments.

Attention ! L'image d'un intervalle fermé (resp. borné) par une fonction continue est pas un intervalle, mais pas forcément fermé (resp. borné). Pour le côté borné, pensez à la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration Soient $f \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ et a et b deux réels pour lesquels $a \leqslant b$. Le segment $[a, b]$ est compact, donc son image $f\big([a, b]\big)$ aussi. Cela dit, $f\big([a, b]\big)$ est aussi un intervalle d'après le TVI, donc $f\big([a, b]\big)$ est un intervalle compact, i.e. un segment.

On ne s'en rend pas bien compte sur cette preuve courte, mais l'ingrédient principal en est le théorème de Bolzano-Weierstrass. C'est grâce à lui en effet que les segments sont compacts.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x \ln x}{x^2 + e^x}$ possède un minimum sur $]0, 1]$.

Démonstration On pourrait étudier les variations de f, mais les calculs à mener seraient délicats et le théorème des bornes atteintes permet de les éviter. Prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, f est continue sur le **SEGMENT** $[0, 1]$, donc y possède un minimum. Ensuite, ce minimum est atteint sur $]0, 1]$ ouvert en 0 car f est strictement négative sur $]0, 1[$ et $f(0) = 0$.

Exemple Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

Démonstration Soient $T > 0$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T-périodique. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur le **SEGMENT** $[0, T]$, donc il existe un réel $K \geqslant 0$ pour lequel $\big|f(x)\big| \leqslant K$ pour tout $x \in [0, T]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{T} - 1 < \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor \leqslant \dfrac{x}{T}$ donc $0 \leqslant x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T < T$, donc $\big|f(x)\big| = \left|f\left(x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T\right)\right| \leqslant K$.

3.4 Convergence simple, convergence uniforme

Il existe tout un tas de de normes en mathématiques, pas seulement celle que vous connaissez dans le plan ou l'espace.

Dans ce paragraphe, nos fonctions sont à valeurs complexes.

Définition-théorème (Norme infinie d'une fonction bornée) On suppose E non vide. Pour toute fonction bornée $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, on appelle *norme infinie de f sur E* et on note $\|f\|_\infty$ (ou $\|f\|_{\infty,E}$ en cas d'ambiguïté) le réel :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \left|f(x)\right|.$$

Pour toutes fonctions bornées $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: $\quad \|f\|_\infty = 0 \iff f = 0,$

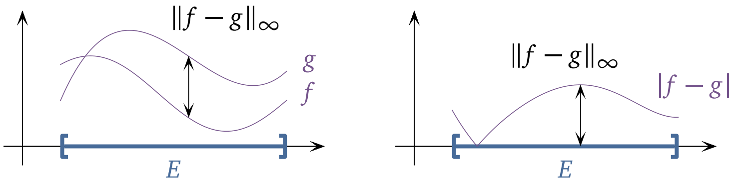
$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| . \|f\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad (\textit{inégalité triangulaire}).$$

La bonne définition de $\|f\|_\infty$ découle du caractère borné de f et de la propriété de la borne supérieure. En outre, d'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un segment y est bornée, donc possède une norme infinie.

Démonstration Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions bornées et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Pour commencer : $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in [a,b], \ \left|f(x)\right| = 0$ car $\left|f(x)\right| \geqslant 0$ $\iff \forall x \in [a,b], \ f(x) = 0 \iff f = 0.$
- Ensuite, $\left|f(x)+g(x)\right| \leqslant \left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour tout $x \in E$, donc $\Big\{\left|f(x)+g(x)\right| \ \ | \ \ x\in E\Big\}$ est majoré par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Ainsi, par définition de la borne supérieure : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
- De même, $\left|\lambda f(x)\right| = |\lambda| \times \left|f(x)\right| \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$ pour tout $x \in E$, donc $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$ par définition de la borne supérieure, avec égalité si $\lambda = 0$. Inversement, si $\lambda \neq 0$, alors $\left|f(x)\right| = \dfrac{1}{|\lambda|} \left|\lambda f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty$ pour tout $x \in E$, donc $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty$, et enfin $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| . \|f\|_\infty$.

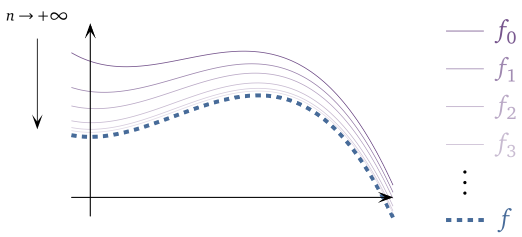
Étant données deux fonctions bornées $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$, les figures ci-contre illustrent le fait que $\|f-g\|_\infty$ est la borne supérieure de l'écart $|f-g|$ entre f et g. On appelle $\|f-g\|_\infty$ la *distance uniforme entre f et g*.



Et si on se servait de cette nouvelle notion de distance pour faire tendre des suites de fonctions vers des fonctions ? Les choses sont hélas plus compliquées avec les suites de fonctions qu'avec les suites de nombres et plusieurs concepts de convergence s'affrontent naturellement. En voici deux.

Définition (Convergence simple, convergence uniforme) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{C}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- **Convergence simple :** On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers f sur E*, ce qu'on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$, si :
$$\forall x \in E, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$
- **Convergence uniforme :** On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers f sur E*, ce qu'on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$, si $f_n - f$ est bornée sur E pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.



La figure ci-contre donne une illustration grossière de ces deux notions de convergence et ne montre pas en quoi ce sont deux notions différentes. Pour comprendre la différence, observons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \iff \forall x \in E, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Réécrivons maintenant les définitions avec des quantificateurs :

- **Convergence simple :** $\quad \forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_x, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$
- **Convergence uniforme :** $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in E, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$

En résumé, c'est la position du quantificateur $\forall x \in E$ qui différencie la convergence simple de la convergence uniforme. Est-il placé avant ou après le quantificateur $\exists N \in \mathbb{N}$? Avec la convergence simple, le rang N dépend de x. Avec la convergence uniforme, il n'en dépend pas, le même N est valable pour tout x uniformément.

Théorème (CVU implique CVS) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de E dans $\mathbb{C}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$, alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$.

Pour savoir vers quelle fonction f une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, il suffit donc de savoir vers quelle fonction f elle converge simplement, ce qui est plus facile. On étudie toujours d'abord la convergence simple, puis on passe à la convergence uniforme, plus subtile.

Démonstration Pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$: $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, donc si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in E$ par encadrement, donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$. ■

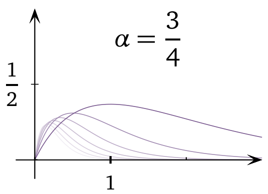
Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction bornée $x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ? uniformément ?

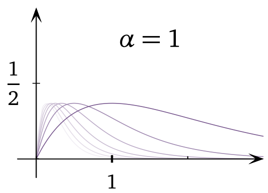
- **Convergence simple :** Fixons $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Si au contraire $x < 1$, alors $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$.
- **Convergence uniforme :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left\|f_n - \mathbb{1}_{\{1\}}\right\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - \mathbb{1}_{\{1\}}(x)\right| = \sup\limits_{x\in[0,1[} \left|f_n(x)\right| = 1$, donc la suite $\left(\left\|f_n - \mathbb{1}_{\{1\}}\right\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

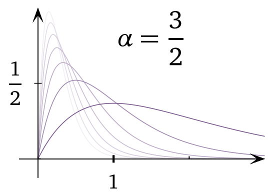
Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \longmapsto n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ? uniformément ?

Montrons d'abord que f_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, f_n est bornée au voisinage de $+\infty$, disons sur $]A,+\infty[$ pour un certain $A > 0$. Mais d'après le théorème des bornes atteintes, f_n est aussi bornée sur le SEGMENT $[0,A]$ par continuité. Ainsi, f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

- **Convergence simple :** Fixons $x \geqslant 0$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si au contraire $x > 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- **Convergence uniforme :** Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$: $f_n'(x) = n^\alpha(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}$, donc f_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ avec $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$ et $f_n(1) = n^\alpha \mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$. Conclusion : $\|f_n - 0\|_\infty = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$. Les figures ci-dessous illustrent le phénomène.







Théorème (Convergence uniforme et continuité) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de E dans $\mathbb{C}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$ et si f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est continue.

Démonstration Soit $a \in E$. Montrons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| \leqslant 2\,\|f_n - f\|_\infty + \left|f_n(x) - f_n(a)\right|.$$

Or par convergence uniforme, $\|f_N - f\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{4}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, et par continuité de f_N en a, il existe un réel $\alpha > 0$ pour lequel pour tout $x \in E$: $|x - a| < \alpha \implies \left|f_N(x) - f_N(a)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout $x \in E$ pour lequel $|x - a| < \alpha$: $\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant 2\,\|f_N - f\|_\infty + \left|f_N(x) - f_N(a)\right| \leqslant 2 \times \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

✖ **Attention !** La convergence simple ne préserve pas la continuité. Comme on l'a vu plus haut, les fonctions continues $x \longmapsto x^n$ convergent simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$ qui n'est pas continue en 1.