Nombres complexes

1 Premiers pas

1.1 Addition et multiplication dans le plan complexe

Définition-théorème (Corps des nombres complexes) On ADMET momentanément l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés les *nombres complexes*, contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations d'*addition* $+$ et de *multiplication* $\times$ qui satisfont les assertions suivantes.

- $\mathbb{C}$ contient un élément i pour lequel $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z peut être écrit d'une et une seule manière sous *forme algébrique* $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le réel x est appelé sa *partie réelle* et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le réel y est appelé sa *partie imaginaire* et noté $\mathrm{Im}(z)$. En résumé : $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.
- La somme et le produit de deux réels « au sens de $\mathbb{C}$ » coïncident avec leur somme et leur produit au sens usuel.
- Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$. Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$: $\quad z + z' = z' + z \quad$ (*commutativité de* $+$), $\quad zz' = z'z \quad$ (*commutativité de* $\times$),

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \quad (\textit{associativité de } +), \qquad (zz')z'' = z(z'z'') \quad (\textit{associativité de } \times),$$

$$z(z' + z'') = (zz') + (zz'') \quad (\textit{distributivité de } \times \textit{ sur } +), \qquad z + 0 = 0 + z = z \quad \text{et} \quad z \times 1 = 1 \times z = z.$$

Ces règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont exactement celles que nous avons exploitées dans $\mathbb{R}$ pour manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$ au chapitre « Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$ ». Pour cette raison, les notations $\sum$ et $\prod$ se définissent et se manipulent dans $\mathbb{C}$ de la même manière que dans $\mathbb{R}$.

L'unicité de la forme algébrique est utilisée fréquemment pour identifier les parties réelle et imaginaire :

$$x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \qquad \Longrightarrow \qquad x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$$

En d'autres termes : UNE égalité de nombres complexes $=$ DEUX égalités de nombres réels

Fixons à présent deux nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Leur somme $z + z'$ se calcule aisément : $\quad z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'), \quad$ donc après identification des parties réelle et imaginaire :

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

De la même manière : $\quad zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = xx' + \mathrm{i}(xy' + yx') + \mathrm{i}^2 yy' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx'), \quad$ donc :

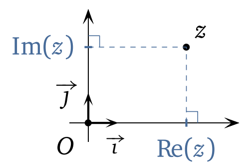
$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z').$$

Attention ! En général : $\quad \mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$.
$\qquad \mathrm{Re}\left(z^2\right) \neq \mathrm{Re}(z)^2 \quad$ et $\quad \mathrm{Im}\left(z^2\right) \neq \mathrm{Im}(z)^2$.

Ces difficultés viennent de ce que z et z' sont tous les deux des nombres complexes. La situation est plus simple quand l'un d'entre eux est un réel. Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z) \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

Exemple Pour $z = 3 + \mathrm{i}$ et $z' = 1 - 2\mathrm{i}$, de tête : $\quad z + 6z' = 9 - 11\mathrm{i} \quad$ et $\quad zz' = 5 - 5\mathrm{i}$.

De même qu'on représente $\mathbb{R}$ comme une droite — la *droite réelle* — on représente $\mathbb{C}$ comme un plan, appelé le *plan complexe*. Concrètement, étant donné un plan quelconque muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on identifie tout nombre complexe z au point M de coordonnées $\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Quand on a envie de distinguer le nombre z du point M, on dit que M est l'*image de* z et que z est l'*affixe de* M.



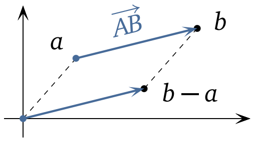
On peut aussi identifier z au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Par exemple, $\vec{\imath}$ est l'image du nombre complexe 1 et $\vec{\jmath}$ l'image de i.

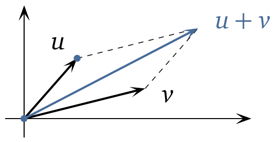
Cette représentation plane de $\mathbb{C}$ identifie $\mathbb{R}$ à l'axe des abscisses dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'axe des ordonnées accueille quant à lui l'ensemble des nombres complexes de la forme $\mathrm{i}y$, y décrivant $\mathbb{R}$, qu'on appelle les *imaginaires purs*.

Les règles usuelles de calcul sur les coordonnées dans un repère se transmettent gentiment aux nombres complexes.

— Pour tous points A et B d'affixes respectifs a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

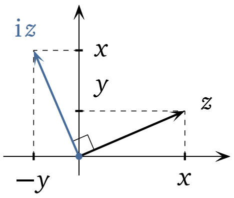
— Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectifs u et v et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u+\mu v$.





Exemple Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le milieu du segment joignant z et z' a pour affixe $\dfrac{z+z'}{2}$.

Pour finir, que représente géométriquement le produit $\mathrm{i}z$ pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$? Calculons-le : $\mathrm{i}z = -y+\mathrm{i}x$, puis plaçons-le dans le plan complexe. Le vecteur d'affixe z a simplement tourné d'un angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

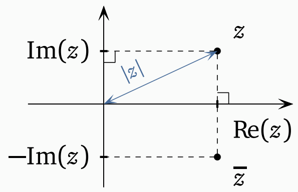


✖ **Attention !** **Les inégalités n'ont aucun sens dans $\mathbb{C}$.**

1.2 Conjugué, module, inverse

Le *module* généralise à $\mathbb{C}$ la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Définition-théorème (Conjugué, module) Soit $z \in \mathbb{C}$.



- **Conjugué :** On appelle *conjugué de z* le nombre complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

  Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe des réels.
- **Module :** On appelle *module de z* le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

  Géométriquement, $|z|$ est la distance entre les points 0 et z ou encore la norme du vecteur d'affixe z. Il en découle que : $|z| = 0 \iff z = 0$, mais aussi que : $\big|\mathrm{Re}(z)\big| \leqslant |z|$ et $\big|\mathrm{Im}(z)\big| \leqslant |z|$.
- **La relation fondamentale :** $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = \big(x^2+y^2\big) + \mathrm{i}(xy-yx) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

La relation $z\overline{z} = |z|^2$ sert en permanence, ne serait-ce que pour inverser les nombres complexes.

Définition-théorème (Inverse)
Tout nombre complexe non nul z possède un et un seul inverse $\dfrac{1}{z}$ pour la multiplication : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Exemple $\dfrac{1}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{2^2+1^2} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$. De même, $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur car $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2} = \dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = \mathrm{i}$.

Théorème (Propriétés algébriques du conjugué et du module) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- **Conjugué :** $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- **Module :** $|\overline{z}| = |z|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$ et si $z' \neq 0$: $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$: $z-\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$,

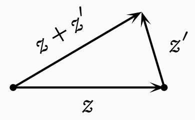
et par positivité du module : $|zz'| = \sqrt{|zz'|^2} = \sqrt{(zz')\overline{(zz')}} = \sqrt{z\overline{z} \times z'\overline{z'}} = \sqrt{|z|^2}\,\sqrt{|z'|^2} = |z| \times |z'|$.

Exemple Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le conjugué de $2+\mathrm{i}z$ vaut $\overline{2+\mathrm{i}z} = 2+\overline{\mathrm{i}}\times\overline{z} = 2-\mathrm{i}\overline{z}$ et non pas $2-\mathrm{i}z$ comme vous le croyez souvent !

Théorème (Inégalité triangulaire) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$

avec égalité si et seulement si les vecteurs z et z' sont colinéaires de même sens.

Inégalité triangulaire généralisée : $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|$.



Démonstration L'inégalité généralisée se démontre dans $\mathbb{C}$ par substitution comme dans $\mathbb{R}$.

- **Inégalité triangulaire :**
$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'} \\ &= |z|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}+|z'|^2 = |z|^2+2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)+|z'|^2 \\ &\leqslant |z|^2+2\left|z\overline{z'}\right|+|z'|^2 = |z|^2+2\,|z|.|z'|+|z'|^2 = \left(|z|+|z'|\right)^2 \end{aligned}$$
On conclut en composant par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- **Cas d'égalité :** La majoration $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|z\overline{z'}\right|$ est la seule rupture d'égalité de la preuve qui précède. L'inégalité $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ est donc une égalité si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |z\overline{z'}|$, i.e. si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ car les réels positifs sont les seuls nombres complexes dont la partie réelle est égale au module.

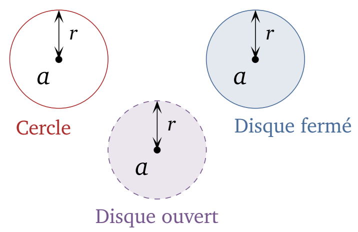
  Le cas d'égalité annoncé est bien sûr vrai si $z'=0$ car z et z' sont alors colinéaires de même sens. Dans le cas contraire :
$$z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ \quad \overset{|z'|>0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2} \in \mathbb{R}_+ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+ \quad \Longleftrightarrow \quad z \text{ et } z' \text{ sont colinéaires de même sens.}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A, B, le module $|a-b|$ n'est autre que la distance AB.
Il en découle que pour tout $r>0$:

— le cercle de centre a et de rayon r est l'ensemble $\big\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-a|=r\big\}$,

— le disque fermé de centre a et de rayon r est l'ensemble $\big\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-a| \leqslant r\big\}$,

— le disque ouvert de centre a et de rayon r est l'ensemble $\big\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-a| < r\big\}$.



Exemple Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1 car :
$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}t}-1\right| = \left|\frac{2-(1+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}t}\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}t}{1+\mathrm{i}t}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1.$$

Exemple À quelle condition sur $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$ le quotient $\dfrac{z+2}{1+\mathrm{i}z}$ est-il un réel ? Être réel, c'est par exemple être égal à son conjugué, mais on peut aussi dire que c'est avoir une partie imaginaire nulle. Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{1+\mathrm{i}z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(z+2)\left(1-\mathrm{i}\overline{z}\right)}{|1+\mathrm{i}z|^2}\right) \overset{|1+\mathrm{i}z|^2 \in \mathbb{R}}{=} \frac{\mathrm{Im}\left(z-\mathrm{i}\,|z|^2+2-2\mathrm{i}\,\overline{z}\right)}{|1+\mathrm{i}z|^2} = \frac{y-|z|^2-2x}{|1+\mathrm{i}z|^2} = \frac{y-2x-x^2-y^2}{|1+\mathrm{i}z|^2}.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} \frac{z+2}{1+\mathrm{i}z} \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{1+\mathrm{i}z}\right) = 0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2+2x-y=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{4} \quad &&\Longleftrightarrow \quad \left|z+1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$
Conclusion : $\dfrac{z+2}{1+\mathrm{i}z}$ est un réel si et seulement si z appartient au cercle de centre $-1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ — privé du point i car de fait, i appartient à ce cercle.

1.3 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème (Racines carrées d'un nombre complexe) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ possède exactement deux solutions opposées appelées les *racines carrées de z*.

L'équation $\omega^2 = 0$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ ne possède quant à elle qu'une seule solution, à savoir 0.

✖ **Attention !** La notation $\sqrt{x}$ n'est autorisée QUE si $x \in \mathbb{R}_+$. Pas de $\sqrt{2+3\mathrm{i}}$ et autres horreurs du même genre !

Pourquoi cet interdit ? Parce que nous ne savons pas **CHOISIR**. Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et aucune n'est préférable à l'autre en général. Un réel strictement positif possède lui aussi deux racines carrées, mais l'une est positive et l'autre négative, et on **CHOISIT** par convention de noter $\sqrt{x}$ la première.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ de formes algébriques respectives $z = x + \mathrm{i}y$ et $\omega = a + \mathrm{i}b$. L'idée forte de la preuve, c'est l'équivalence : $\omega^2 = z \iff \omega^2 = z$ et $|\omega|^2 = |z|$ dans laquelle on a ajouté manu militari l'équation des modules.

$$\omega^2 = z \iff \omega^2 = z \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |z| \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iff a^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = y \quad \text{par demi-somme et demi-différence.}$$

Comme $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, les réels $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}$ sont tous deux positifs, donc possèdent chacun une ou deux racines carrées dans $\mathbb{R}$, l'une positive, l'autre négative. Cette remarque fournit jusqu'à quatre couples (a, b), mais l'équation $2ab = y$ force a et b à être de même signe ou de signes opposés selon le signe de y. On obtient finalement deux racines carrées $\omega = a + \mathrm{i}b$ de z, opposées et distinctes car $z \neq 0$. ■

Exemple Les racines carrées de $24 + 10\mathrm{i}$ sont $\pm(5 + \mathrm{i})$.

Démonstration Pour tout $\omega = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 24 + 10\mathrm{i} &\iff \omega^2 = 24 + 10\mathrm{i} \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |24 + 10\mathrm{i}| = 2 \times |12 + 5\mathrm{i}| \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 24 \\ 2ab = 10 \end{cases} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 2\sqrt{12^2 + 5^2} = 26 \\
&\iff a^2 = \frac{26+24}{2} = 25, \quad b^2 = \frac{26-24}{2} = 1 \quad \text{et} \quad ab = 5 \\
&\overset{ab=5\geqslant 0}{\iff} (a, b) = (5, 1) \quad \text{ou} \quad (a, b) = (-5, -1) \iff \omega = 5 + \mathrm{i} \quad \text{ou} \quad \omega = -(5 + \mathrm{i}).
\end{aligned}$$

Nous sommes à présent capables de résoudre les équations du second degré à coefficients complexes.

Théorème (Équations du second degré à coefficients complexes) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

- **Résolution de l'équation :** Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont les nombres $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du *discriminant* $b^2 - 4ac$.
- **Factorisation du polynôme associé :** Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- **Somme et produit des racines :** $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration La preuve repose sur une transformation fondamentale des expressions du second degré — leur mise sous forme canonique. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right) \quad \textit{(forme canonique)} \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right) = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right).
\end{aligned}$$

On conclut en observant qu'un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

À présent, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$, donc par identification des coefficients : $b = -a(z_1 + z_2)$ et $c = az_1z_2$, et on en tire $z_1 + z_2$ et z_1z_2. ■

Exemple Les solutions de l'équation $z^2 - (3 + \mathrm{i})z + (2 + \mathrm{i}) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont 1 et $2 + \mathrm{i}$.

Démonstration Le discriminant de cette équation vaut $(3 + \mathrm{i})^2 - 4(2 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$. Or les racines carrées de $2\mathrm{i}$ sont $\pm(1 + \mathrm{i})$, donc les solutions cherchées sont $\dfrac{(3+\mathrm{i}) \pm (1+\mathrm{i})}{2}$, i.e. 1 et $2 + \mathrm{i}$.

En lien avec ce qui précède, la relation $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$ nous permet de calculer x et y quand on connaît leur somme $x + y$ et leur produit xy.

Théorème (Systèmes somme-produit) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Les solutions du *système somme-produit* $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ xy=b \end{array}\right.$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$ sont les deux racines — éventuellement égales — du polynôme $X^2 - aX + b$.

Exemple Les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x+y=3+\mathrm{i} \\ xy=2+\mathrm{i} \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ sont les couples $(1, 2+\mathrm{i})$ et $(2+\mathrm{i}, 1)$. Nous avons en effet calculé les racines du polynôme $X^2-(3+\mathrm{i})X+(2+\mathrm{i})$ dans l'exemple précédent.

1.4 Quelques mots sur les suites et les fonctions complexes

Nous avons développé récemment une théorie rigoureuse des limites pour les suites réelles, mais pas encore pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et encore moins pour les suites complexes et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Un peu de patience !

La définition de la limite d'une suite réelle se généralise cela dit aisément aux suites complexes, il suffit d'y lire les valeurs absolues comme des modules. En attendant plus de rigueur, nous nous autoriserons à l'occasion un passage à la limite dans $\mathbb{C}$ et vous aurez juste besoin du résultat suivant.

Théorème (Limites de suites complexes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n-\ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell).$$

D'après la première équivalence, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la distance entre u_n et ℓ, qui est un réel, tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z|<1$, alors $z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration Pour tout $z \in \mathbb{C}$ pour lequel $|z|<1$: $\quad |z^n-0| = |z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad$ donc $z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la première équivalence du théorème.

Attention ! Où sont $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{C}$? Réponse : nulle part. Une suite complexe ne peut tendre que vers un complexe, pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Intéressons-nous maintenant aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si vous avez compris intuitivement la notion de limite pour les fonctions réelles, vous croirez sans peine qu'elle puisse être étendue aux fonctions complexes. Attention tout de même ! Pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut faire tendre x vers $+\infty$, mais $f(x)$ ne peut tendre que vers un nombre complexe.

Exemple $$\frac{x+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \qquad \left(\mathrm{Arctan}\, x + \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{i}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème (Limites de fonctions complexes) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $\ell \in \mathbb{C}$ et a un élément de I ou une borne de I.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \big|f(x)-\ell\big| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell).$$

De la notion de limite pour les fonctions complexes découlent naturellement deux notions de continuité et de dérivabilité exactement comme dans le cas réel. Les notations $\mathscr{C}(E,\mathbb{C})$, $\mathscr{D}(E,\mathbb{C})$, $\mathscr{C}^k(E,\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(E,\mathbb{C})$ ne surprendront personne.

Théorème (Régularité d'une fonction complexe) Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- **Continuité :** f est continue sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- **Dérivabilité :** f est dérivable sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
  Dans ce cas : $\quad f' = \mathrm{Re}(f)' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)', \quad$ autrement dit $\mathrm{Re}\big(f'\big) = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}\big(f'\big) = \mathrm{Im}(f)'$.

Le même genre d'équivalence est vraie avec « k fois dérivable », « de classe $\mathscr{C}^k$ » et « de classe $\mathscr{C}^\infty$ » à la place de « continue » et « dérivable ».

Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que dans le cas réel, de même que la formule de dérivation d'une composée $g \circ f$ pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

✖ **Attention !** Nous dérivons des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou plus généralement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc toujours par rapport à une variable **RÉELLE**. Il est possible de dériver des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par rapport à une variable **COMPLEXE**, mais nous ne le ferons pas, la théorie est très différente.

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto 1 + 3\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{3x}$ car les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$ le sont.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient, de dérivée $x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+\mathrm{i})^2}$.

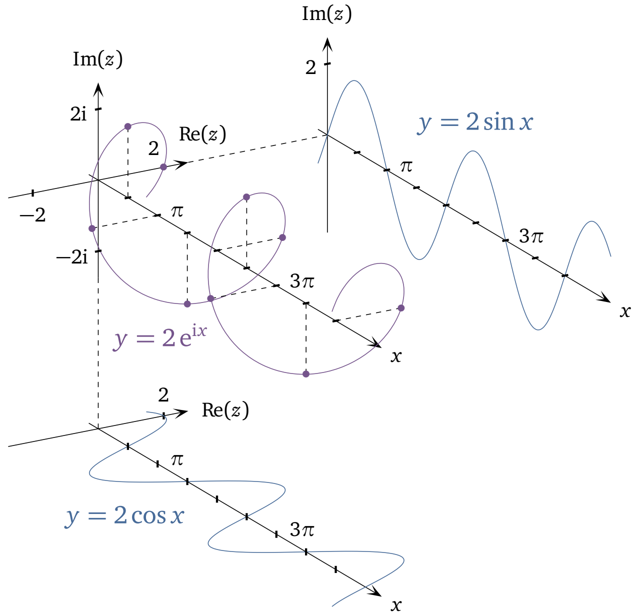
Pour les fonctions complexes, pas question de parler de monotonie ou de signe de la dérivée puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, mais le théorème suivant est en revanche conservé et nous nous en servirons bientôt.

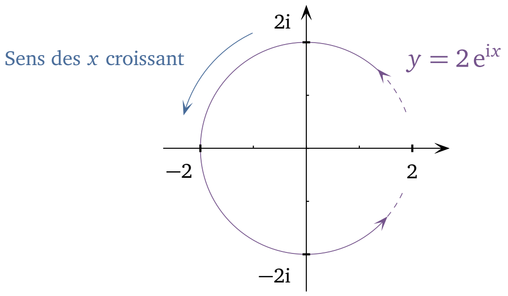
Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soient I un **INTERVALLE** et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Et pour finir, une question naturelle. Comment représente-t-on graphiquement une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$? On peut le faire de deux façons.

— De même qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ requiert deux axes réels, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ requiert un axe réel pour la variable $x \in \mathbb{R}$ et un plan pour son image $z = f(x) \in \mathbb{C}$. Ci-contre, la fonction $x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = 2\cos x + 2\mathrm{i}\sin x$, sa partie réelle $x \longmapsto 2\cos x$ en-dessous et sa partie imaginaire $x \longmapsto 2\sin x$ à droite.

— Pour plus de simplicité, on peut aussi voir f comme un mobile qui se déplace dans $\mathbb{C}$ et se contenter de représenter les valeurs de f sans représenter l'axe réel de son ensemble de définition. Ci-dessous, la même fonction $x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.





2 Exponentielle complexe et formes trigonométriques

2.1 Présentation informelle de l'exponentielle complexe

En Première, on vous a demandé d'admettre qu'il existe une et une seule fonction $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, appelée *fonction exponentielle*, pour laquelle $f' = f$ et $f(0) = 1$. En Terminale, on vous a défini une autre forme d'exponentielle en posant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Pourquoi la même notation ? Parce que les deux exponentielles transforment les sommes en produits ? Eh bien non, pas tout à fait. La même notation est employée parce qu'il n'y a qu'une seule exponentielle en réalité, définie sur $\mathbb{C}$ tout entier et que je vais tâcher de vous présenter rapidement.

Nous prouverons en temps voulu que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite complexe $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par définition, sa limite est notée e^z ou $\exp(z)$ et appelée *exponentielle (de) z*.

Vous pouvez retenir dès à présent que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.}$

Cette définition doit être vue comme la bonne définition de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$… du moins quand on a les moyens d'en tirer proprement les propriétés usuelles, ce qui n'est pas notre cas à ce stade. Qu'à cela ne tienne, les calculs qui suivent seront tous justifiés peu à peu dans l'année.

Un premier problème se pose. Notre nouvelle exponentielle sur $\mathbb{C}$ coïncide-t-elle sur $\mathbb{R}$ avec l'exponentielle de Première ? Pour nous convaincre que oui, vérifions que $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$ avec $\exp(0) = 1$. Hélas, une somme infinie ne se dérive pas toujours comme une somme finie. Par chance, les choses se passent bien dans le cas qui nous occupe. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \overset{\text{Gonflé !}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x \qquad \text{et de plus } \mathrm{e}^0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = 1.$$

Plus généralement, étant donnés une partie E de $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(E, \mathbb{C})$, dérivons la fonction complexe e^{φ} :

$$\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^n}{n!}\right)' \overset{\text{Gonflé !}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\varphi'\varphi^{n-1}}{n!} = \varphi' \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!} = \varphi' \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!} = \varphi' \mathrm{e}^{\varphi}.$$

Intéressons-nous à présent au produit de deux exponentielles et autorisons-nous à manipuler les sommes infinies avec légèreté. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z'^j}{j!} = \sum_{i,j \geqslant 0} \frac{z^i z'^j}{i!\,j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j \geqslant 0 \\ i+j=n}} \frac{z^i z'^j}{i!\,j!} \qquad \text{après regroupement des termes en fonction de } i+j \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i z'^{n-i}}{i!(n-i)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i z'^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \mathrm{e}^{z+z'}.\end{aligned}$$

Qui eût cru que la relation $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$ était une autre manière d'énoncer la formule du binôme ? En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0 = 1, \quad$ donc d'une part $\mathrm{e}^z \neq 0$, et d'autre part $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Autre relation utile, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\overline{z}}. \quad$ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. On définit finalement les fonctions cosinus et sinus à partir de l'exponentielle complexe en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Vous avez bien lu, nous venons de définir le cosinus et le sinus à l'aide de l'exponentielle et il se trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x. \quad$ En termes de module, cette relation montre que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Maintenant, dérivons-la : $\quad \cos'(x) + \mathrm{i}\sin'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{i} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i} \times (\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\sin x + \mathrm{i}\cos x. \quad$ Par identification des parties réelle et imaginaire : $\quad \cos' = -\sin \quad$ et $\quad \sin' = \cos$.

Dernier calcul essentiel, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \\ &= \big(\cos x \cos y - \sin x \sin y\big) + \mathrm{i}\big(\sin x \cos y + \cos x \sin y\big),\end{aligned}$$

donc par identification des parties réelle et imaginaire : $\quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

et : $\quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \quad$ Beurk !

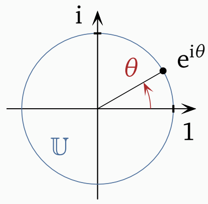
Ainsi, les affreuses formules d'addition du cosinus et du sinus ne sont que les parties réelle et imaginaire de la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. En d'autres termes, la trigonométrie est laide quand on la projette sur l'axe des réels et l'axe des imaginaires purs, mais que de beauté, que de simplicité quand on respecte sa vraie nature, qui est d'habiter $\mathbb{C}$! La trigonométrie est fondamentalement une affaire de nombres complexes.

Je ne m'aventurerai pas plus loin sur ce sentier, mais si on suit la piste jusqu'au bout, on définit le nombre π lui-même à partir de l'exponentielle complexe en montrant que les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont tous les multiples d'un certain réel positif, 2π par définition. Mais trêve de bavardages ! Dans la suite du chapitre, je m'appuierai sur vos connaissances du lycée, à savoir l'exponentielle réelle et les fonctions cosinus et sinus.

2.2 NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1 ET EXPONENTIELLE IMAGINAIRE

Tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près. Le théorème qui suit n'est que la traduction complexe de ce résultat.

Définition-théorème (Ensemble $\mathbb{U}$ et exponentielle imaginaire) On pose $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\right\}$, géométriquement le cercle trigonométrique, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.



- **Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'exponentielle imaginaire :** $\quad \mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \mid \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$
  et pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$.
  En particulier, la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ est injective sur $[0, 2\pi[$ ou bien $]-\pi, \pi]$.
- **Propriétés algébriques de l'exponentielle imaginaire :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}\,e^{iy}, \qquad \overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}},$$

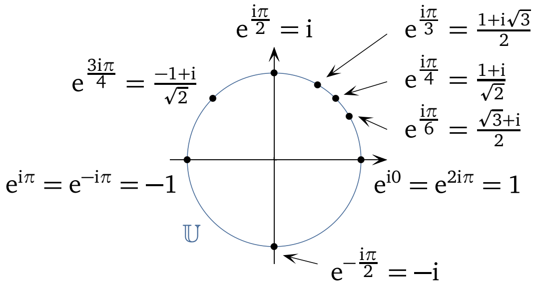
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\textit{formules d'Euler}),$$

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\big((\cos x + i\sin x)^n\big) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \mathrm{Im}\big((\cos x + i\sin x)^n\big) \quad (\textit{formules de Moivre}).$$

Démonstration Pour les formules d'Euler, n'oublions pas que $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Pour les formules de Moivre : $\quad \cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx} = \left(e^{ix}\right)^n = (\cos x + i\sin x)^n$.

On l'a déjà vu, la relation $e^{i(x+y)} = e^{ix}\,e^{iy}$ est équivalente aux formules d'addition du cosinus et du sinus par identification des parties réelle et imaginaire car elle s'écrit aussi :

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y).$$



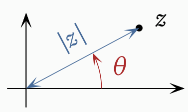
Attention ! $\quad \boxed{e^{i\theta} = e^{i\theta'} \quad \cancel{\iff} \quad \theta = \theta'.}$

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = 1 \iff e^{i\theta} = e^{i0} \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$
et : $\quad e^{i\theta} = i \iff e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} \iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \theta \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.

2.3 FORMES TRIGONOMÉTRIQUES

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\quad \left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$, $\quad$ donc $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, donc $z = |z|\,e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près.

Définition-théorème (Arguments et formes trigonométriques) Tout nombre complexe non nul peut être écrit sous *forme trigonométrique* $z = |z|\,e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près.



Tout réel θ de ce genre est appelé UN *argument de* z, mais il en existe un et un seul dans $]-\pi, \pi]$ qu'on appelle L'*argument* (*principal*) *de* z et qu'on note $\arg(z)$.

Identification des formes trigonométriques : Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \iff r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Attention ! Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad 0 = 0\,e^{i\theta}$, $\quad$ mais par convention, 0 n'a pas de forme trigonométrique, donc pas d'arguments.

Exemple Les réels et les imaginaires purs ont des formes trigonométriques plus piégeuses qu'il n'y paraît, attention !

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$: $\quad x = \begin{cases} x\,e^{i0} & \text{si } x > 0 \\ (-x)\,e^{i\pi} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad$ et $\quad iy = \begin{cases} y\,e^{\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y > 0 \\ (-y)\,e^{-\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y < 0. \end{cases}$

Tout nombre complexe non nul possède un argument sous forme d'arctangente, d'arccosinus ou d'arcsinus.

Exemple On cherche un argument de $-1+2i$. Comme $-1<0$ et $2>0$, $-1+2i$ possède un argument θ dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

- **Arctangente :** $-1<0$, donc $\pi+\operatorname{Arctan}\frac{2}{-1}=\pi-\operatorname{Arctan}2$ est un argument de $-1+2i$.
- **Arccosinus :** $\theta\in[0,\pi]$ et $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, donc $\theta=\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
- **Arcsinus :** $\pi-\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, donc $\theta=\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Exemple Soit $n\in\mathbb{N}^*$. À quelle condition sur $p\in\mathbb{Z}$ le nombre $e^{\frac{ip\pi}{n}}$ est-il réel ?

$$e^{\frac{ip\pi}{n}}\in\mathbb{R} \iff \arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)\equiv 0\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)\equiv \pi\ [2\pi] \iff \arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\iff \frac{p\pi}{n}\equiv 0\ [\pi] \underset{\times n}{\overset{\div\pi}{\iff}} p\equiv 0\ [n] \iff p \text{ est un multiple de } n.$$

Théorème (Propriétés algébriques des arguments) Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}^*$:

$$\arg\left(zz'\right)\equiv\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi],\qquad \arg\left(\overline{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi]\qquad\text{et}\qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi].$$

Démonstration $zz'=|z|\,e^{i\arg(z)}|z'|\,e^{i\arg(z')}=|zz'|\,e^{i(\arg(z)+\arg(z'))}$, donc $\arg\left(zz'\right)\equiv\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.

De même : $\overline{z}=\overline{|z|\,e^{i\arg(z)}}=|z|\,e^{-i\arg(z)}=|\overline{z}|\,e^{-i\arg(z)}$, donc $\arg\left(\overline{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$.

Enfin : $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|\,e^{i\arg(z)}}=\left|\frac{1}{z}\right|e^{-i\arg(z)}$, donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$.

Exemple Le nombre complexe $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument car $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\,e^{-\frac{i\pi}{3}}}=\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$.

Or par ailleurs : $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$, donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Théorème (Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$) Soient $a,b\in\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$.

En notant A l'image de a, B celle de b et M celle de z : $\left|\frac{z-b}{z-a}\right|=\frac{MB}{MA}$ et $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

Démonstration En notant $\vec{\imath}$ le vecteur d'affixe 1, $b-z$ a pour image $\overrightarrow{MB}$, donc $\arg(b-z)\equiv\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

Ainsi : $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\equiv\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)\equiv\arg(b-z)-\arg(a-z)\equiv\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MB}\right)-\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

2.4 Exponentielle complexe

Définition (Exponentielle complexe) On pose pour tout $z\in\mathbb{C}$: $e^z=e^{\mathrm{Re}(z)}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.

Ce nombre complexe est défini sous forme **TRIGONOMÉTRIQUE** : $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg\left(e^z\right)\equiv\mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.

Si vous deviez ne retenir qu'une chose, retenez vraiment que l'exponentielle est définie sous forme trigonométrique. Sa forme algébrique s'en déduit aussitôt : $e^z=e^{\mathrm{Re}(z)}\cos\mathrm{Im}(z)+i\,e^{\mathrm{Re}(z)}\sin\mathrm{Im}(z)$.

Exemple $e^{1+i\pi}=e\times e^{i\pi}=-e$ et $e^{2+\frac{i\pi}{4}}=e^2\,e^{\frac{i\pi}{4}}=e^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{e^2}{\sqrt{2}}+\frac{i\,e^2}{\sqrt{2}}$.

Théorème (Propriétés de l'exponentielle complexe)

(i) **Périodicité :** L'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, autrement dit pour tout $z\in\mathbb{C}$: $e^{z+2i\pi}=e^z$.

Plus précisément, pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^z=e^{z'}\iff z\equiv z'\ [2i\pi]$. ⟵ Attention au i !

(ii) **Transformation des sommes en produits :** Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^{z+z'}=e^z\,e^{z'}$.

L'exponentielle complexe transforme donc les formes algébriques en formes trigonométriques.

Démonstration

(i) Simple identification de formes trigonométriques :

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff e^{\mathrm{Re}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z')} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z') \ [2\pi] \\ &\iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z') \ [2\pi] \quad \iff \quad z \equiv z' \ [2i\pi]. \end{aligned}$$

(ii) $e^{z+z'} = e^{\mathrm{Re}(z+z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z+z')} = e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Im}(z')} = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z')} = e^z e^{z'}$.

Il est plus compliqué de définir un logarithme complexe que l'exponentielle complexe car la $2i\pi$-périodicité de $z \longmapsto e^z$ accorde une infinité de logarithmes à tout nombre complexe non nul.

Exemple On souhaite résoudre l'équation $e^z = 2+i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Il s'agit juste d'identifier des formes trigonométriques, mais z est donné sous forme algébrique. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^z = 2+i &\iff e^x = |2+i| = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y \text{ est un argument de } 2+i \\ &\iff x = \frac{\ln 5}{2} \quad \text{et} \quad y \equiv \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}\ [2\pi] \quad \iff \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{\ln 5}{2} + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} + 2ik\pi. \end{aligned}$$

Théorème (Dérivation des fonctions de la forme e^φ) Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(E, \mathbb{C})$. La fonction $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur E et $\left(e^\varphi\right)' = \varphi' e^\varphi$.

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto a\,e^{ax}$.

Démonstration Nous avons admis momentanément que la relation $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ se généralise au cas où g est à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais f doit rester à valeurs dans $\mathbb{R}$ car nous ne savons pas dériver g par rapport à une variable complexe. Ainsi, bien que la relation $\left(e^\varphi\right)' = \varphi' e^\varphi$ paraisse familière, nous ne pouvons pas la voir comme une conséquence de la relation $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ car c'est l'exponentielle complexe qui y figure.

Posons $a = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $b = \mathrm{Im}(\varphi)$. Par hypothèse sur φ, les fonctions RÉELLES a et b sont dérivables sur E. Or $e^\varphi = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$, donc $\mathrm{Re}(e^\varphi) = e^a \cos b$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi) = e^a \sin b$. Ainsi, $\mathrm{Re}(e^\varphi)$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi)$ sont dérivables sur E, donc e^φ aussi. En outre :

$$\left(\mathrm{Re}(e^\varphi)\right)' = \left(e^a \cos b\right)' = a' e^a \cos b - e^a b' \sin b = e^a (a' \cos b - b' \sin b) = e^a \mathrm{Re}\big((a'+ib')(\cos b + i \sin b)\big) = \mathrm{Re}\big(\varphi' e^\varphi\big).$$

On montre de même que $\left(\mathrm{Im}(e^\varphi)\right)' = \mathrm{Im}\big(\varphi' e^\varphi\big)$. Comme voulu : $\left(e^\varphi\right)' = \varphi' e^\varphi$.

3 Sommes trigonométriques

3.1 Transformation des expressions $a \cos x + b \sin x$

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ distinct de $(0,0)$, la fonction $x \longmapsto a \cos x + b \sin x$ peut être écrite sous la forme d'un unique cosinus $x \longmapsto A \cos(x + \varphi)$ ou d'un unique sinus $x \longmapsto A \sin(x + \psi)$ pour certains $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. La transformation repose essentiellement sur les identités : $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z')$.

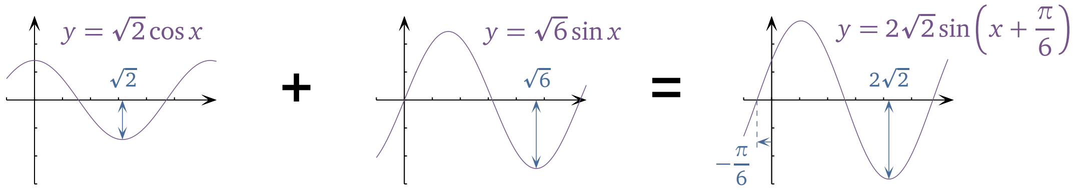
Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour écrire $\cos x + \sin x$ sous la forme d'un cosinus, on cherche de tête deux réels u et v pour lesquels $\cos x + \sin x = \mathrm{Re}\big((u+iv)(\cos x + i \sin x)\big)$, et c'est presque tout :

$$\cos x + \sin x = \mathrm{Re}\big((1-i)(\cos x + i \sin x)\big) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{ix}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour un sinus, partie imaginaire :

$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{6} \sin x = \mathrm{Im}\big((\sqrt{6} + i\sqrt{2})(\cos x + i \sin x)\big) = \mathrm{Im}\left(2\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{6}} e^{ix}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left(e^{i\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Graphiquement, la deuxième égalité signifie que la somme des signaux sinusoïdaux $x \longmapsto \sqrt{2} \cos x$ et $x \longmapsto \sqrt{6} \sin x$ est encore un signal sinusoïdal, de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $\frac{\pi}{6}$.



Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$2\cos x - 3\sin x = \mathrm{Re}\big((2+3\mathrm{i})(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\big) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \sqrt{13}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}\right)}\right) = \sqrt{13}\cos\left(x + \mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}\right).$$

3.2 Linéarisation et opération inverse

Linéariser une expression polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$ — par exemple $5\sin^4 x\cos^7 x + 2\sin x\cos^4 x$ — c'est l'exprimer comme une combinaison linéaire de $\cos x$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$... et $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$... en supprimant toute puissance et tout produit. La recette est simple : Euler, binôme, Euler.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sin^5 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5 \overset{\text{Binôme}}{=} \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 5\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 5\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)$$
$$= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) - 5\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + 10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x}{16}.$$

C'est notamment en les linéarisant qu'on primitive les fonctions $x \longmapsto \cos^m x\sin^n x$, m et n décrivant $\mathbb{N}$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \frac{1}{32}\left(-\frac{\sin(6x)}{6} - 2\,\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right)$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x\sin^2 x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos^4 x\sin^2 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \overset{\text{Binôme}}{=} -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$$
$$= -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 2\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + 2\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{64}\left(\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right) + 2\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right) - \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) - 4\right)$$
$$\overset{\text{Euler}}{=} \frac{-\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2}{32}.$$

Il est parfois utile de *dé-linéariser* les expressions trigonométriques. Là aussi, la recette est simple : Moivre, binôme.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(6x) = 2\left(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x\right)\cos x\sin x$.

Démonstration $\sin(6x) \overset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^6\right)$
$$\overset{\text{Binôme}}{=} \mathrm{Im}\left(\cos^6 x + 6\mathrm{i}\cos^5 x\sin x - 15\cos^4 x\sin^2 x - 20\mathrm{i}\cos^3 x\sin^3 x + 15\cos^2 x\sin^4 x + 6\mathrm{i}\cos x\sin^5 x - \sin^6 x\right)$$
$$= 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x = 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x\sin^2 x + 3\sin^4 x\right)\cos x\sin x$$

La relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ nous permet finalement de valoriser le cosinus dans la parenthèse, par exemple.
$\sin(6x) = 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\left(1 - \cos^2 x\right)^2\right)\cos x\sin x = 2\left(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x\right)\cos x\sin x$.

3.3 Technique de l'angle moitié

La *technique de l'angle moitié* consiste à écrire les expressions $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ sous forme trigonométrique. On s'en sert souvent pour factoriser des expressions en cosinus et sinus. L'idée est simple. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \underbrace{\boxed{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}}}_{\text{Mise en facteur de l'angle moitié } \frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}.$$

En réalité, le résultat obtenu n'est pas forcément la forme trigonométrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ car le cosinus obtenu peut être négatif, mais on n'en est pas loin. La technique s'adapte au cas des expressions $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

Très souvent, y est nul et le calcul prend la forme suivante : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x}{2}}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}\cos\frac{x}{2}$.

Théorème (Quatre nouvelles formules de trigo) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Il est inutile de connaître ces formules par cœur, mais indispensable de savoir les retrouver instantanément.

Démonstration $\sin x + \sin y = \mathrm{Im}\left(e^{ix} + e^{iy}\right) \underset{\text{moitié}}{\overset{\text{Angle}}{=}} \mathrm{Im}\left(2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cos\dfrac{x-y}{2}\right) = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}.$ ■

Exemple Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\cos(nx) & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

Démonstration Vous devez à tout prix savoir refaire cette démonstration.

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Si au contraire $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $e^{2ix} \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{2ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\right) \overset{e^{2ix}\neq 1}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1}\right) \underset{\text{moitié}}{\overset{\text{Angle}}{=}} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}\right)$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} \mathrm{Re}\left(e^{inx}\,\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\right) = \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\,\mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) = \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\cos(nx).$$

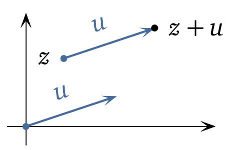
4 Transformations usuelles du plan complexe

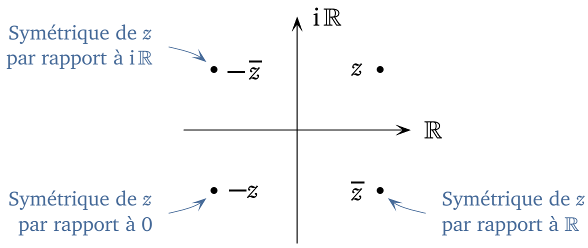
Les figures ci-dessous vous rappellent :

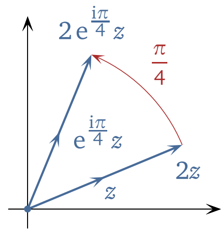
— que l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation,

— deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples,

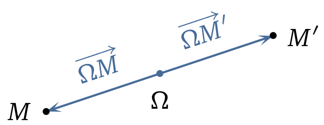
— que le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.



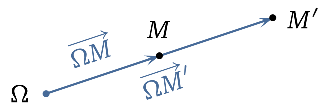




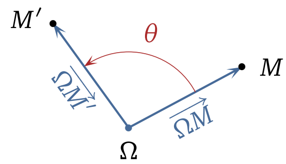
Voyons maintenant ce qu'il en est de transformations plus compliquées. Dans chacun des cas ci-dessous, un point Ω d'affixe ω est fixé et on effectue une transformation sur un point M d'affixe z. L'image de M par cette transformation est un point M' d'affixe z'.



Symétrie centrale
par rapport à Ω :
$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$,
donc $z' - \omega = -(z-\omega)$
i.e. $z' = 2\omega - z$.



Homothétie de centre Ω
et de rapport λ (ici $\lambda = 2$) :
$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$,
donc $z' - \omega = \lambda(z-\omega)$
i.e. $z' = \omega + \lambda(z-\omega)$.

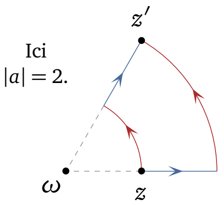


Rotation de centre Ω
et d'angle de mesure θ :
$\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$
donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$
i.e. $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

Les transformations usuelles précédentes s'avèrent finalement toutes de la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\overline{z}+b$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Réciproquement, de quelle manière une transformation quelconque $z \longmapsto az+b$ s'interprète-t-elle géométriquement ? Fixons $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et notons f la transformation $z \longmapsto az+b$ et α un argument de a.

— Si $a = 1$, f est simplement la translation de vecteur b.

— Si $a \neq 1$, remarquons d'abord que f possède un et un seul point fixe car l'équation $f(\omega) = \omega$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ admet $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ pour seule et unique solution. Exprimons maintenant f sous une forme sympathique grâce à ce point fixe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $z' = f(z)$:



$$z' - \omega = (az+b) - (a\omega+b) = a(z-\omega) \quad = \quad \underbrace{|a| \times \underbrace{e^{i\alpha}(z-\omega)}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}} \quad = \quad \underbrace{e^{i\alpha} \times \underbrace{|a|(z-\omega)}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}}}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}.$$

Conclusion : f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres et l'ordre dans lequel on compose ces deux transformations ne compte pas. On dit que f est la *similitude directe de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure α.*

Exemple La fonction $z \overset{f}{\longmapsto} 2iz+1$ est la similitude directe de centre $\dfrac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration Le coefficient $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$ est différent de 1, donc f n'est pas une translation, mais une similitude directe de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Son centre est aussi son unique point fixe et vaut $\dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$.

5 Racines $n^{\text{èmes}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est la réciproque de la fonction puissance $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Pour tous } x, y \geqslant 0+ : \qquad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.$$

Définition (Racines $n^{\text{èmes}}$, ensemble $\mathbb{U}_n$) Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de z* tout nombre complexe ζ pour lequel $z = \zeta^n$.

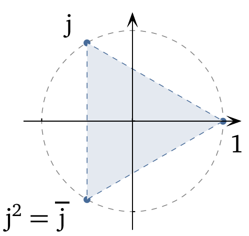
Les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont appelées les *racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité* et leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Attention ! La notation $\sqrt[n]{x}$ n'est autorisée QUE si $x \in \mathbb{R}_+$. Pas de $\sqrt[n]{2+3i}$ et autres horreurs du même genre !

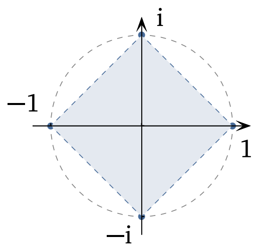
Pourquoi cet interdit ? Parce que tout nombre complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes comme on va le voir, qui se valent toutes les unes les autres. Laquelle noter $\sqrt[n]{z}$?

Théorème (Description des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ \middle|\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$.

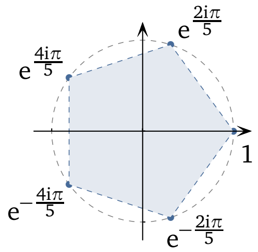
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est donc l'ensemble des sommets du polygone *régulier* — i.e. à côtés de même longueur — à n côtés, de centre 0 et passant par le point d'affixe 1. Pour $n = 3$, on a posé $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.



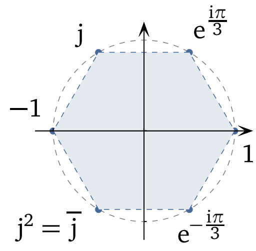
Triangle équilatéral $\mathbb{U}_3$



Carré $\mathbb{U}_4$



Pentagone régulier $\mathbb{U}_5$



Hexagone régulier $\mathbb{U}_6$

Démonstration Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Posons $\rho = |\omega|$ et notons φ l'unique argument de ω dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par identification de formes trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\omega^n = 1 \quad &\iff \quad \rho^n\, e^{in\varphi} = 1\, e^{i0} &&\iff \quad \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\varphi \equiv 0\ [2\pi] \\
&\underset{\rho \in \mathbb{R}_+}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ n\varphi = 2k\pi &&\iff \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
&\underset{\varphi \in [0, 2\pi[}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \varphi = \frac{2k\pi}{n} &&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Nous avons bien obtenu n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et pas moins car la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ est injective sur $[0, 2\pi[$ et les nombres $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ sont des éléments distincts de $[0, 2\pi[$. ■

Exemple Pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$. La première égalité raconte que la moyenne $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ des éléments de $\mathbb{U}_n$, qu'on appellerait leur centre de gravité en physique, est le nombre 0. En d'autres termes, les polygones réguliers des figures précédentes sont centrés en 0.

Démonstration $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ car $n \geqslant 2$, donc : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0.$

De même : $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}} = e^{(n-1)i\pi} = (-1)^{n-1}.$

Définition (Nombre j) On note généralement j le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il faut connaître les relations suivantes :

$$j^3 = 1, \qquad \overline{j} = j^2, \qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad \text{et pour tout } z \in \mathbb{C} : \quad z^2 + z + 1 = (z - j)\big(z - \overline{j}\big).$$

Démonstration Comme $j \neq 1$: $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0.$ ■

La relation $j^3 = 1$ montre que toute puissance de j vaut 1, j ou $j^2 = \overline{j}$ après réduction modulo 3 de l'exposant. Par exemple, $j^{32} = j^2$ car $32 \equiv 2\ [3]$, et de même $j^{13} = j$ car $13 \equiv 1\ [3]$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{Z}$. À quelle condition nécessaire et suffisante est-il vrai que $(1 + j)^n = j^n$? En tout cas, on évite d'utiliser ici la formule du binôme !

$$(1+j)^n = j^n \iff \left(-j^2\right)^n = j^n \iff (-j)^n = 1 \iff e^{-\frac{ni\pi}{3}} = 1 \iff -\frac{n\pi}{3} \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\iff n \equiv 0\ [6] \iff n \text{ est un multiple de } 6.$$

Théorème (Description générale des racines $n^{\text{èmes}}$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0. Sinon, tout nombre complexe non nul $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$, à savoir les nombres :

$$\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k \text{ décrivant } [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration Soit $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\zeta = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}}$. Il est immédiat que $\zeta^n = z$ et ζ est non nul. Nous disposons ainsi d'un exemple de racine $n^{\text{ème}}$ de z, et grâce à lui, nous allons les trouver toutes. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\omega^n = z \iff \omega^n = \zeta^n \overset{\zeta \neq 0}{\iff} \frac{\omega}{\zeta} \in \mathbb{U}_n$$
$$\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}.$$ ■

Exemple Les racines cubiques de $1 + i$ sont : $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

Démonstration $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, donc les racines cubiques de $1+i$ sont les trois nombres $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}}$, k décrivant $\{0, 1, 2\}$.

6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Après l'exemple des suites arithmético-géométriques du chapitre « Suites réelles », on s'intéresse dans cette partie à une nouvelle famille de suites récurrentes usuelles, les *suites récurrentes linéaires d'ordre 2*, du genre $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Exemple Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C}$. La suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $q^2 = aq + b$, i.e. si et seulement si q est racine du polynôme $X^2 - aX - b$.

Définition **(Suite récurrente linéaire d'ordre 2)** Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire d'ordre 2 (de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Nous avons découvert les récurrences doubles avec ce genre de suites, mais à l'époque, vous pouviez seulement montrer par récurrence des relations qui vous étaient données. Désormais, vous les sortirez simplement de vos têtes !

On suppose $b \neq 0$ dans la définition car pour $b = 0$, la relation $u_{n+2} = au_{n+1}$ nous ramène au cas des suites géométriques à partir du rang 1.

Théorème **(Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.

- **Cas où $\Delta \neq 0$:** Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $\left(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, λ_1 et λ_2 décrivant $\mathbb{C}$.
- **Cas où $\Delta = 0$:** Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède une seule racine r. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $\left((\lambda n + \mu) r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

Le théorème distingue deux cas selon que Δ est nul ou non, mais ce qui compte le plus, ce sont les racines du polynôme caractéristique et le fait qu'elles sont égales ou non.

Nous prouverons le résultat après un exemple.

Exemple On cherche une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$ et ce polynôme a pour racines $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ après calcul. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de la forme $\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Calculons λ_1 et λ_2 grâce aux conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, i.e. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 1$. Après calcul, $\lambda_1 = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$, donc $u_n = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration **(du théorème)** Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$. Deux remarques préliminaires :

— Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}$, si $u_0 = u_1 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient encore à $\mathscr{E}$.

Tâchons maintenant de déterminer $\mathscr{E}$ explicitement.

- **Cas où $\Delta \neq 0$:** D'après le premier exemple du paragraphe, les suites $\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathscr{E}$, donc toute suite de la forme $\left(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ appartient à $\mathscr{E}$.

  Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. Donnons-nous deux nombres complexes quelconques λ_1 et λ_2 que nous finirons par choisir soigneusement. La suite $\left(u_n - \lambda_1 r_1^n - \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient toujours à $\mathscr{E}$ et ses deux premiers termes valent $u_0 - \lambda_1 - \lambda_2$ et $u_1 - \lambda_1 r_1 - \lambda_2 r_2$. Peut-on choisir λ_1 et λ_2 pour qu'ils vaillent tous deux 0 ? Eh bien oui, il suffit de poser $\lambda_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\lambda_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$, ce qui est possible car $r_1 \neq r_2$. Pour ces valeurs de λ_1 et λ_2, la suite $\left(u_n - \lambda_1 r_1^n - \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$ et ses deux premiers termes sont nuls, donc ses termes sont tous nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

- **Cas où $\Delta = 0$:** Dans ce cas très particulier, le polynôme $X^2 - aX - b$ n'a qu'une seule racine r, non nulle car $b \neq 0$, et en l'occurrence $r = \frac{a}{2}$, donc $2r - a = 0$.

  Comme nous l'avons vu, la suite $\left(r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$, mais c'est aussi le cas de la suite $\left(nr^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (n+2)\,r^{n+2} - a\,(n+1)\,r^{n+1} - bnr^n = nr^n\left(r^2 - ar - b\right) + r^{n+1}(2r - a) = 0 + 0 = 0.$ Toute suite de la forme $\left((\lambda n + \mu)\,r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ appartient donc à $\mathscr{E}$.

  Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. Donnons-nous deux nombres complexes quelconques λ et μ que nous finirons par choisir soigneusement. La suite $\left(u_n - (\lambda n + \mu)\,r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient toujours à $\mathscr{E}$ et ses deux premiers termes valent $u_0 - \mu$ et $u_1 - \lambda r - \mu r$. Peut-on choisir λ et μ pour qu'ils vaillent tous deux 0 ? Eh bien oui, il suffit de poser $\lambda = \frac{u_1 - ru_0}{r}$ et $\mu = u_0$, ce qui est possible car $r \neq 0$, b étant non nul. Pour ces valeurs de λ et μ, la suite $\left(u_n - (\lambda n + \mu)\,r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$ et ses deux premiers termes sont nuls, donc ses termes sont tous nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = (\lambda n + \mu)\,r^n$.

En réalité, le théorème précédent sert assez peu souvent, car s'il a le mérite de la généralité, ce sont plutôt des suites réelles qu'on manipule en pratique. Dans le théorème qui suit, on ne s'intéresse justement qu'à des suites réelles, mais la preuve s'appuie sur le théorème complexe précédent.

Théorème **(Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, cas réel)** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.

- **Cas où $\Delta > 0$:** Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 RÉELLES de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $\left(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, λ_1 et λ_2 décrivant $\mathbb{R}$.
- **Cas où $\Delta = 0$:** Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède une seule racine réelle r. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 RÉELLES de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $\big((\lambda n + \mu)\, r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Cas où $\Delta < 0$:** Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines non réelles conjuguées distinctes $\rho\, e^{\pm i\theta}$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 RÉELLES de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $\Big(\rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

Les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu$ décrivent cette fois $\mathbb{R}$ et non plus $\mathbb{C}$.

Démonstration Nous avons déjà déterminé l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 complexes de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$. Il nous suffit maintenant de savoir lesquelles sont réelles et lesquelles ne le sont pas.

- **Cas où $\Delta > 0$:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. Comme $\Delta \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains λ_1, λ_2 COMPLEXES. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, alors en particulier $u_0 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $u_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ sont des réels, mais r_1 et r_2 en sont aussi, donc $\lambda_1 = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\lambda_2 = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$ sont réels. Réciproquement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles si λ_1 et λ_2 sont réels.
- **Cas où $\Delta = 0$:** On traite ce cas à peu près comme le précédent.
- **Cas où $\Delta < 0$:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. Comme $\Delta \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda \rho^n e^{ni\theta} + \mu \rho^n e^{-ni\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains λ, μ COMPLEXES. Par ailleurs, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ car $\rho\, e^{i\theta}$ et $\rho\, e^{-i\theta}$ ne sont pas des réels.

  Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles. En particulier, $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \rho\left(\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}\right)$ sont des réels, donc leurs parties imaginaires sont nulles, donc d'une part $\mathrm{Im}(\lambda) + \mathrm{Im}(\mu) = 0$, et d'autre part :
  $$\Big(\mathrm{Im}(\lambda) + \mathrm{Im}(\mu)\Big) \cos\theta + \Big(\mathrm{Re}(\lambda) - \mathrm{Re}(\mu)\Big) \sin\theta = 0.$$
  On tire de ces deux égalités que $\mathrm{Re}(\mu) = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $\mathrm{Im}(\mu) = -\mathrm{Im}(\lambda)$, i.e. que $\mu = \overline{\lambda}$. Réciproquement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles si $\mu = \overline{\lambda}$ et a bien la forme voulue car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$u_n = \lambda \rho^n e^{ni\theta} + \overline{\lambda} \rho^n e^{-ni\theta} = 2\rho^n \mathrm{Re}\big(\lambda e^{ni\theta}\big) = \rho^n \Big(2\,\mathrm{Re}(\lambda)\, \cos(n\theta) - 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\, \sin(n\theta)\Big).$$

Exemple On cherche une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Évidemment, cette suite est réelle, mais elle est aussi récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc de la forme $\big((\lambda n + \mu)\, 1^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ensuite, $\mu = u_0 = 0$ et $\lambda + \mu = u_1 = 1$, donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, autrement dit $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple On cherche une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Évidemment, cette suite est réelle et on en a déterminé une expression explicite dans un exemple précédent en passant par la version complexe du théorème. Reprenons les calculs avec la version réelle.

Récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - X + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ensuite, $\lambda = u_0 = 0$ et $\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\mu\sqrt{3}}{2} = u_1 = 1$, donc $\mu = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et enfin $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{n\pi}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.