Suites réelles

1 Compléments sur les réels

Dans cette partie, A et B sont des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

1.1 Majorants/minorants, maximum/minimum

Définition (Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **Partie majorée :** On dit que A est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leqslant M.$
  Un tel réel M est appelé UN *majorant de A*. On dit aussi que A est *majorée par M* ou encore que M *majore A*.
- **Partie minorée :** On dit que A est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad m \leqslant a.$
  Un tel réel m est appelé UN *minorant de A*. On dit aussi que A est *minorée par m* ou encore que m *minore A*.
- **Partie bornée :** On dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si :
$$\exists K \geqslant 0, \quad \forall a \in A, \quad |a| \leqslant K.$$

Attention ! On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais bien toujours d'UN majorant car une telle partie en possède toujours plein. Tout réel plus grand qu'un majorant est lui-même un majorant.

Exemple L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, donc aussi par tout réel supérieur à 1. Il n'est pas minoré en revanche.

Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum d'une partie de $\mathbb{R}$)

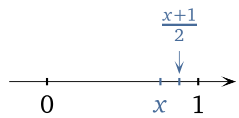
- **Plus grand élément :** On appelle *plus grand élément de A* ou *maximum de A* tout élément de A qui majore A.
- **Plus petit élément :** On appelle *plus petit élément de A* ou *minimum de A* tout élément de A qui minore A.

Théorème (Unicité du plus grand/petit élément) Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler LE plus grand (resp. petit) élément de A et le noter $\max A$ (resp. $\min A$).

Attention ! Le plus grand/petit élément est unique... S'IL EXISTE !

Démonstration Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux plus grands éléments de A, alors $M' \leqslant M$ car M majore A et $M' \in A$, et de même $M \leqslant M'$ car M' majore A et $M \in A$. Conclusion : $M = M'$.

Exemple L'intervalle $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'a pas de plus grand élément.



Démonstration 0 appartient à $[0, 1[$ et le minore, donc en est le plus petit élément.

Pour montrer que $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément, il nous suffit de montrer qu'aucun élément de $[0, 1[$ ne majore $[0, 1[$. Or pour tout $x \in [0, 1[$, $x < \dfrac{x+1}{2}$ alors que $\dfrac{x+1}{2} \in [0, 1[$, donc on arrive toujours à trouver au-dessus de tout élément de $[0, 1[$ un élément de $[0, 1[$ strictement supérieur.

Théorème (Deux propriétés de $\mathbb{N}$)

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration

(i) Soit A une partie de $\mathbb{N}$, vide ou non. Supposons par contraposition que A ne possède pas de plus petit élément. Aucun élément de A ne peut alors minorer A. Or nous allons montrer par récurrence que A est minorée par n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découlera comme voulu que A est vide.

Initialisation : A est minorée par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A minorée par n. Comme par hypothèse A ne possède pas de plus petit élément, forcément $n \notin A$, donc $a > n$ pour tout $a \in A$. Mais ceci revient à dire, parce que nous travaillons avec des ENTIERS, que $a \geqslant n+1$ pour tout $a \in A$. En d'autres termes, A est minorée par $n+1$.

(ii) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble des majorants ENTIERS de A est non vide, donc possède un plus petit élément m d'après (i).

- Supposons d'abord que $m = 0$. Dans ce cas $a \leqslant m = 0$ pour tout $a \in A$, donc $a = 0$ car $a \in \mathbb{N}$. Puisque A est non vide, cela montre que $A = \{0\}$, et donc A admet 0 pour plus grand élément.
- Supposons ensuite que $m \geqslant 1$. Ainsi $m-1 \in \mathbb{N}$, donc par minimalité de m, $m-1$ ne majore pas A, donc $m-1 < a$ pour un certain $a \in A$. Or l'inégalité entre ENTIERS $m-1 < a \leqslant m$ est en fait une égalité, donc $m = a \in A$. Conclusion : m est un élément de A qui majore A, i.e. le plus grand élément de A.

Nous venons de démontrer l'assertion (i) par récurrence, mais en réalité, l'assertion (i) est équivalente au principe de récurrence. Faisons en effet l'hypothèse que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément et tirons-en le principe de récurrence. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et pour laquelle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \implies n+1 \in A.$ Pour montrer que $A = \mathbb{N}$, supposons par l'absurde que $A \neq \mathbb{N}$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \; n \notin A\}$ est ainsi une partie non vide de $\mathbb{N}$, et même de $\mathbb{N}^*$ car $0 \in A$, donc possède un plus petit élément $m \geqslant 1$ par hypothèse. En particulier, $m-1 \in A$, donc $m = (m-1)+1 \in A$ par définition de A — contradiction.

Il découle de l'équivalence du principe de récurrence et de l'assertion (i) que toute récurrence peut être rédigée comme la preuve ci-dessus. Nous verrons en temps voulu que cette rédaction est parfois très avantageuse.

Exemple Tout entier naturel non nul est un produit de nombres premiers — éventuellement vide ou composé d'un seul nombre premier.

Démonstration Nous avons déjà montré ce résultat par récurrence forte. Cette fois, supposons par l'absurde que le résultat est faux et notons E l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont pas un produit de nombres premiers. Par hypothèse, E est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc possède un plus petit élément m. En particulier, m n'est pas premier, donc peut être écrit $m = ab$ pour certains $a, b \in [\![1, m-1]\!]$. Par minimalité de m, a et b n'appartiennent pas à E, donc sont des produits de nombres premiers, donc $m = ab$ aussi — contradiction.

1.2 Borne supérieure/inférieure

Nous avons vu que $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément, et pourtant sa borne 1 est quelque chose de ce genre — mais quoi ? Ce qui rend le majorant 1 si particulier, c'est qu'il est le meilleur majorant de $[0,1[$ qu'on pouvait espérer, le plus petit possible — d'où la définition suivante.

Définition (Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **Borne supérieure :** S'il existe, le plus petit majorant de A est appelé LA *borne supérieure de A* et noté $\sup A$.
- **Borne inférieure :** S'il existe, le plus grand minorant de A est appelé LA *borne inférieure de A* et noté $\inf A$.

La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

La borne supérieure n'existe pas toujours, mais quand elle existe, elle est unique en tant que plus petit élément — raison pour laquelle on peut parler de LA borne supérieure et lui accorder une notation.

Exemple $\sup\, [0,1[= 1$.

Démonstration Pour commencer, 1 majore $[0,1[$, mais il reste à montrer qu'aucun réel strictement inférieur ne majore $[0,1[$. Soit $x < 1$. Si $x < 0$, x ne majore pas $[0,1[$ car $0 \in [0,1[$. Et si $x \in [0,1[$, alors $x < \dfrac{x+1}{2}$ et pourtant $\dfrac{x+1}{2} \in [0,1[$, donc x ne majore pas $[0,1[$. Dans les deux cas, x ne majore pas $[0,1[$.

En résumé, $[0,1[$ possède une borne supérieure mais pas de plus grand élément. Inversement, une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle posséder un plus grand élément mais pas de borne supérieure ? Eh bien non.

Théorème (Max/min implique sup/inf) Si A possède un plus grand élément, alors A possède une borne supérieure et $\sup A = \max A$. De même, si A possède un plus petit élément, alors A possède une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

Démonstration Faisons l'hypothèse que A possède un plus grand élément et montrons que l'ensemble $\mathscr{M}$ des majorants de A possède un plus petit élément, en l'occurrence $\max A$. Cela montrera à la fois que A possédera une borne supérieure et que $\sup A = \max A$. Deux choses à vérifier :

— que $\max A \in \mathscr{M}$, mais $\max A$ majore A par définition,

— que $\max A$ minore $\mathscr{M}$, mais $\max A \in A$ par définition.

Exemple Non majoré, $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure. En revanche, parce que 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

Théorème (Opérations sur les bornes supérieures) On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

(i) **Inclusion :** Si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) **Réunion :** L'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et $\sup(A \cup B) = \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$.

(iii) **Somme :** L'ensemble $A + B = \left\{a + b \mid \quad a \in A, \quad b \in B\right\}$ possède une borne supérieure et :
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

(iv) **Multiplication par un réel strictement positif :** Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\lambda A = \left\{\lambda a \mid \quad a \in A\right\}$ possède une borne supérieure et $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

On dispose bien sûr de résultats analogues sur les bornes inférieures.

Démonstration

(i) Pour tout $x \in A$, x appartient à B, donc $x \leqslant \sup B$, donc $\sup B$ majore A, donc $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) Pour tout $x \in A$: $\quad x \leqslant \sup A \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$, $\quad$ et pour tout $x \in B$: $\quad x \leqslant \sup B \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$, donc $\max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ majore $A \cup B$.

Soit $s < \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$. Alors $s < \sup A$ ou $s < \sup B$, donc s ne majore pas A ou s ne majore pas B, donc $s < x$ pour un certain $x \in A \cup B$, ce qui prouve que s ne majore pas $A \cup B$.

Comme voulu, $\max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ est le plus petit majorant de $A \cup B$.

(iii) Pour tout $x = a + b \in A + B$ avec $a \in A$ et $b \in B$: $\quad x \leqslant \sup A + \sup B$, $\quad$ donc $\sup A + \sup B$ majore $A + B$.

Soit $s < \sup A + \sup B$. Aussitôt $s - \sup B < \sup A$, donc $s - \sup B$ ne majore pas A, donc $s - \sup B < a$ pour un certain $a \in A$. Ainsi $s - a < \sup B$, donc $s - a$ ne majore pas B, donc $s - a < b$ pour un certain $b \in B$. Finalement : $\quad s < a + b \quad$ et $\quad a + b \in A + B$, $\quad$ donc s ne majore pas $A + B$.

Comme voulu, $\sup A + \sup B$ est le plus petit majorant de $A + B$.

(iv) Pour tout $x = \lambda a \in \lambda A$ avec $a \in A$: $\quad x = \lambda a \leqslant \lambda \sup A \quad$ car $\lambda > 0$, donc $\lambda \sup A$ majore λA.

Soit $s < \lambda \sup A$. Aussitôt $\dfrac{s}{\lambda} < \sup A$, donc $\dfrac{s}{\lambda}$ ne majore pas A, donc $\dfrac{s}{\lambda} < a$ pour un certain $a \in A$. Finalement $s < \lambda a$ et $\lambda a \in \lambda A$, donc s ne majore pas λA.

Comme voulu, $\lambda \sup A$ est le plus petit majorant de λA.

1.3 Propriété de la borne supérieure/inférieure

Vous savez presque tout sur les réels, mais pas tout. Et vous avez beau manipuler des inégalités depuis longtemps, il y a une propriété de la relation $\leqslant$ que vous ne connaissez pas — dite *propriété de la borne supérieure* — dont le rôle est central en mathématiques. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit $\mathbb{R}$, mais justement nous ne construirons pas $\mathbb{R}$, donc peu importe. À bien des égards, en tout cas, toute l'analyse est cachée dans cette propriété. Directement ou non, c'est d'elle que nous déduirons tous les grands théorèmes d'analyse du programme de MPSI — théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, théorème de Heine et construction de l'intégrale.

Le problème posé est simple, on veut déterminer toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui possèdent une borne supérieure. Or pour commencer, l'ensemble vide admet tout réel pour majorant, donc ne possède pas de borne supérieure car $\mathbb{R}$ n'est pas minoré. Ensuite, évidemment, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, cette partie est en particulier majorée — mais la réciproque est-elle vraie ? Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède-t-elle une borne supérieure ? La réponse est oui, ce qui signifie que le résultat qui suit est le meilleur qu'on pouvait espérer.

Théorème **(Propriété de la borne supérieure/inférieure)**

- **Propriété de la borne supérieure :** Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- **Propriété de la borne inférieure :** Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Attention ! Généralement, en mathématiques, le mot « propriété » renvoie à UNE propriété parmi d'autres d'un objet. Quand nous parlerons de LA propriété de la borne supérieure, il s'agira toujours du théorème fondamental qui précède.

La propriété de la borne supérieure est un pur résultat d'EXISTENCE et ne raconte rien d'intéressant sur la VALEUR des bornes supérieures. Telle borne supérieure existe, c'est magique, mais la propriété n'en dit pas plus. Nous n'avons pas eu besoin de la propriété de la borne supérieure pour montrer que $\sup\, [0,1[= 1$ car nous avions à l'avance une idée très claire de la valeur de cette borne, mais dans les contextes plus théoriques, nous n'aurons aucune valeur claire à proposer et nous serons bien contents d'avoir une baguette magique pour faire surgir des êtres de nulle part.

Exemple Faites l'effort d'oublier que vous manipulez des racines carrées depuis des lustres. Pour tout $a \geqslant 0$, $\sqrt{a}$ est par définition l'unique réel positif r pour lequel $r^2 = a$, mais cette définition est un théorème d'existence et d'unicité avant d'être une définition. L'unicité est claire, car pour tous $r, r' \geqslant 0$, si $r^2 = r'^2$, alors $r = \pm r'$, donc $r = r'$ par positivité. L'existence en revanche, qui nous la garantit ? Vous avez cru religieusement en l'existence des racines carrées jusqu'ici sans même vous en rendre compte. Je vous demande aujourd'hui de croire en la propriété de la borne supérieure, i.e. de remplacer un acte de foi par un autre, mais vous pouvez toujours vous renseigner sur la construction des réels si ça vous empêche de dormir.

Démonstration Fixons $a \geqslant 0$. J'affirme que l'ensemble $R = \left\{ r \geqslant 0 \mid \quad r^2 \leqslant a \right\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Si on admet l'existence des racines carrées, alors évidemment $R = \left[0, \sqrt{a}\right]$, mais si on se donne au contraire pour mission de les définir, on serait content de pouvoir poser par définition $\sqrt{a} = \sup R$.

— L'ensemble R est non vide car il contient 0.

— Ensuite, R est majoré par $a+1$ car pour tout $r \in R$, sachant que $a+1 \geqslant 1$: $\quad r^2 \leqslant a \leqslant a+1 \leqslant (a+1)^2$, donc $(a+1-r)(a+1+r) \geqslant 0$, donc $a+1-r \geqslant 0$, et enfin $r \leqslant a+1$.

La propriété de la borne supérieure nous permet comme voulu de poser $\sqrt{a} = \sup \left\{ r \geqslant 0 \mid \quad r^2 \leqslant a \right\}$. On pourrait ensuite déduire toutes les propriétés usuelles de la racine carrée de cette définition rigoureuse.

Exemple Plus curieux encore, l'existence de la partie entière découle elle aussi de la propriété de la borne supérieure. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est par définition l'unique entier relatif n pour lequel $n \leqslant x < n+1$, c'est-à-dire le plus grand élément de l'ensemble $E = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \quad n \leqslant x \right\}$, mais qui nous garantit que cet ensemble a un plus grand élément ? Toute partie de $\mathbb{N}$ majorée par un ENTIER possède un plus grand élément, mais E est ici majoré par le RÉEL x. Or une partie de $\mathbb{Z}$ majorée par un réel est-elle majorée par un entier ? Bien sûr, me direz-vous, toute partie de $\mathbb{Z}$ majorée par x est majorée par $\lfloor x \rfloor$, mais cela revient à admettre l'existence de $\lfloor x \rfloor$ et nous tournons en rond.

En fait, E est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure $\lfloor x \rfloor$ d'après la propriété de la borne supérieure, mais $\lfloor x \rfloor$ est un réel a priori et il faut PROUVER que c'est un entier, ce que je ne ferai pas ici.

1.4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La propriété de la borne supérieure est un outil puissant mais présente un gros inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « TOUTE partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. » Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ? Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en ! Donnons-nous pour cela deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ et notons-les $+\infty$ et $-\infty$. Peu importe qui ils sont, ce qui compte, ce sont les règles de calcul que nous allons leur imposer.

Définition **(Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$)** On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \left\{ -\infty, +\infty \right\}$, puis on étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$.
- **Prolongement de l'addition :** $\quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad$ et $\quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad$ et $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- **Prolongement de la multiplication :** $\quad \dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \quad$ et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \left\{0\right\}$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Attention !
Nous ne donnons aucun sens aux expressions : $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0\times(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\times 0$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$, rien ne nous empêche de définir comme nous l'avons fait dans $\mathbb{R}$ les notions de majorant/max/sup et minorant/min/inf. Il n'est alors pas dur de montrer que les majorants/max/sup obtenus DANS $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/max/sup DANS $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui n'avaient pas de majorant/max/sup dans $\mathbb{R}$ en ont maintenant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Quand on en aura besoin, on notera $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A$ la borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ d'une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$.

— Toute partie A non vide et non majorée de $\mathbb{R}$ admet $+\infty$ pour unique majorant DANS $\overline{\mathbb{R}}$. A fortiori, $+\infty$ est le plus petit majorant de A, donc $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A=+\infty$. Par exemple : $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R}_+ = +\infty$.

— $\varnothing$ admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant DANS $\overline{\mathbb{R}}$, donc $-\infty$ est son plus petit majorant, donc $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing=-\infty$. De même, $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} \varnothing=+\infty$. L'ensemble vide est la seule partie de $\overline{\mathbb{R}}$ dont la borne inférieure dépasse la borne supérieure.

La propriété de la borne supérieure s'énonce finalement avec plus de pureté dans $\overline{\mathbb{R}}$ que dans $\mathbb{R}$, elle a trouvé son chez-soi.

Théorème (Propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$)

- TOUTE partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$.
- Pour toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncident.

On dispose bien sûr de résultats analogues sur les bornes inférieures.

1.5 QU'EST-CE QU'UN INTERVALLE ?

Par définition, pour tous $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$: $[a,b]=\left\{x\in\overline{\mathbb{R}}\ \middle|\ a\leqslant x\leqslant b\right\}$,
$[a,b[=\left\{x\in\overline{\mathbb{R}}\ \middle|\ a\leqslant x< b\right\}$, et on définit de même $]a,b]$ et $]a,b[$.

Ces ensembles sont tous appelés des intervalles, mais qu'ont-ils de commun ? Comment donner une définition unique des intervalles, une définition qui ne nous oblige pas à distinguer mille cas ?

Définition (Intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$) On appelle *intervalle de* $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ pour laquelle : $\forall x,y\in I,\quad [x,y]\subset I$.

Par définition, un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ». Nous préparons ici le terrain du TVI, mais patience !

Vous noterez que $[x,y]=\varnothing$ si $x>y$. Dans la définition, on peut donc supposer $x\leqslant y$ sans perte de généralité.

Exemple Pour tous $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ pour lesquels $a\leqslant b$, les ensembles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ sont des intervalles au sens de la définition précédente.

Démonstration Montrons seulement que $[a,b[$ est un intervalle. Soient $x,y\in[a,b[$ avec $x\leqslant y$. Montrons que $[x,y]\subset[a,b[$. Or pour tout $t\in[x,y]$: $a\leqslant x\leqslant t\leqslant y<b$, donc $t\in[a,b[$.

Théorème (Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$) Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$, a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a\leqslant b$.

Démonstration Soit I un intervalle non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. La propriété de la borne inférieure/supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ montre que I possède une borne inférieure a et une borne supérieure b. Distinguons plusieurs cas.

- **Cas où $a\in I$ et $b\in I$:** Montrons que $I=[a,b]$.
  — Montrons que $[a,b]\subset I$. Or I est un intervalle et contient a et b, donc $[a,b]\subset I$.
  — Montrons que $I\subset[a,b]$. Or pour tout $x\in I$, $x\in[a,b]$ car a minore I et b le majore.
- **Cas où $a\in I$ et $b\notin I$:** Montrons que $I=[a,b[$.
  — Montrons que $[a,b[\subset I$. Soit $x\in[a,b[$. Comme $x<b=\sup I$, x ne majore pas I, donc $x<b'$ pour un certain $b'\in I$. Ainsi $a\leqslant x\leqslant b'$ avec $a\in I$ et $b'\in I$, donc $x\in I$ car I est un intervalle.
  — Montrons que $I\subset[a,b[$. Pour tout $x\in I$, $a\leqslant x\leqslant b$ car a minore I et b le majore, mais $x\in I$ alors que $b\notin I$, donc $a\leqslant x<b$, i.e. $x\in[a,b[$.

- **Cas où $a \notin I$ et $b \in I$:** On montre que $I =]a,b]$ en adaptant la preuve du cas précédent.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \notin I$:** On montre cette fois que $I =]a,b[$.

Théorème (Les rationnels et les irrationnels sont partout) Tout intervalle qui n'est ni l'ensemble vide ni un singleton contient à la fois un rationnel et un irrationnel, et même une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

En particulier, il y a toujours un irrationnel entre deux rationnels distincts et un rationnel entre deux irrationnels distincts. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont donc imbriqués l'un dans l'autre comme les deux parties d'une fermeture-éclair, et pourtant ils ne sont pas équipotents !

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$. Montrons que $]a,b[$ contient à la fois un rationnel et un irrationnel. Il en ira de même des intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b]$.

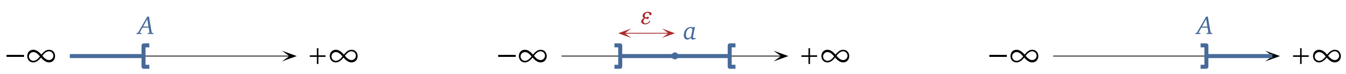
- **Rationnels :** On cherche des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $a < \dfrac{p}{q} < b$. Si on veut être sûr que l'intervalle $]a,b[$ contient un rationnel $\dfrac{p}{q}$, il est naturel d'exiger que sa longueur $b-a$ soit strictement supérieure à l'écart $\dfrac{1}{q}$ entre deux tels nombres. En d'autres termes, il est raisonnable d'exiger l'inégalité $q > \dfrac{1}{b-a}$. Posons donc $q = \left\lfloor \dfrac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$, de telle sorte que $q \in \mathbb{N}^*$ et $1 < q(b-a)$. Pour $p = \lfloor qa \rfloor + 1$: $qa < p \leqslant qa + 1 < qa + q(b-a) = qb$, donc $a < \dfrac{p}{q} < b$.
- **Irrationnels :** D'après ce qui précède, l'intervalle $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins un rationnel r et $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, r\right[$ en contient lui-même un r'. L'un au moins de ces deux rationnels est non nul, par exemple r, et $r\sqrt{2} \in]a,b[$. Enfin, $r\sqrt{2}$ est irrationnel sans quoi $\sqrt{2} = \dfrac{1}{r} \times r\sqrt{2}$ serait rationnel par produit — ce qui est faux.
- **Pourquoi une infinité ?** Une fois qu'on a réussi à trouver un rationnel r_1 dans $]a,b[$, on en trouve de même un r_2 dans $]a, r_1[$, puis un autre r_3 dans $]a, r_2[$, etc.

1.6 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$

Définition (Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$)

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on appelle *voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists \varepsilon > 0, \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.
- On appelle *voisinage de $+\infty$ (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad]A, +\infty[\subset V$.
- On appelle *voisinage de $-\infty$ (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, A[\subset V$.

Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels « à proximité immédiate de a ». Les intervalles $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $]A, +\infty[$ et $]-\infty, A[$ sont ceux auxquels il convient de se représenter quand on réfléchit en termes de voisinages, mais en toute rigueur, toute partie qui **CONTIENT** un intervalle de ce genre est un voisinage. Un voisinage quelconque peut donc avoir une tête assez compliquée.



Voisinage basique de $-\infty$ — Voisinage basique de $a \in \mathbb{R}$ — Voisinage basique de $+\infty$

Théorème (Propriétés des voisinages)

(i) Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, toute intersection **FINIE** de voisinages de a est un voisinage de a.

(ii) Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints. En d'autres termes, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ distincts, il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b pour lesquels $V_a \cap V_b = \varnothing$.

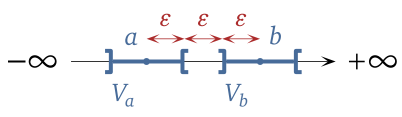
Démonstration Je ne traiterai pas tous les cas possibles, je vous laisse compléter.

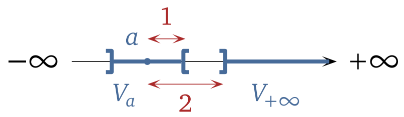
(i) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $V_1, \dots, V_r$ des voisinages de a.

- **Cas où $a \in \mathbb{R}$:** Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un réel $\varepsilon_i > 0$ pour lequel $]a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i[\subset V_i$, donc $]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[\subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ pour $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\} > 0$, donc $V_1 \cap \ldots \cap V_r$ est un voisinage de a.
- **Cas où $a = +\infty$:** Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un réel $A_i > 0$ pour lequel $]A_i, +\infty[\subset V_i$, donc $]A_0, +\infty[\subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ pour $A_0 = \max\{A_1, \dots, A_r\}$, donc $V_1 \cap \ldots \cap V_r$ est un voisinage de $+\infty$.

(ii) Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ deux réels pour lesquels $a < b$.

- **Cas où $a, b \in \mathbb{R}$:** Posons $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$, puis $V_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et $V_b =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Comme voulu, V_a est un voisinage de a, V_b un voisinage de b et $V_a \cap V_b = \varnothing$.
- **Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$:** Posons $V_a =]a-1, a+1[$ et $V_{+\infty} =]a+2, +\infty[$. Comme voulu, V_a est un voisinage de a, $V_{+\infty}$ un voisinage de $+\infty$ et $V_a \cap V_{+\infty} = \varnothing$.





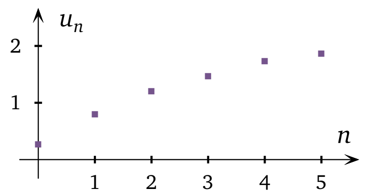
2 Limite d'une suite

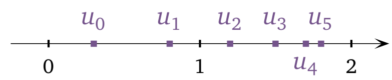
2.1 Vocabulaire usuel

Définition (Suite réelle) On appelle *suite (réelle)* toute fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter u_n le réel $u(n)$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite u.

Nous énoncerons et démontrerons nos théorèmes avec des suites définies sur $\mathbb{N}$ tout entier, mais on le faire avec des suites définies sur $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être représentée graphiquement de deux manières, soit comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, soit comme un ensemble de valeurs le long d'un axe.





Définition (Suite monotone/majorée/bornée) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

— *majorée* si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, i.e. si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$
Un tel M est appelé UN *majorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée par M* ou que M *majore* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— *positive* (resp. *strictement positive*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \geqslant 0 \quad$ (resp. $u_n > 0$).

— *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).

On dispose de définitions analogues des suites *minorées*, *(strictement) négatives* et *(strictement) décroissantes*. On dit enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

— *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K.$

— *monotone* si elle est croissante ou décroissante, et *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes courantes :

— étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,

— étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1, mais seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. Méthode à privilégier quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par des produits/quotients et qu'on peut espérer des simplifications.

Attention !

- Une suite majorée ne possède jamais un seul majorant, une suite majorée par 2 l'est aussi par 3.
- Les majorants d'une suite sont par définition des constantes. Une majoration de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par un réel **QUI DÉPEND DE** n ne montre pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Dans ce chapitre, ce ne sont pas les premiers termes d'une suite qui nous intéressent, mais son comportement à l'infini, et l'expression *à partir d'un certain rang* nous sera d'un grand secours. On la traduit formellement à l'aide de l'enchaînement de quantificateurs : $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \ldots$

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante à partir d'un certain rang*, c'est dire que : $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée par 2 à partir d'un certain rang*, c'est dire que : $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant 2$.

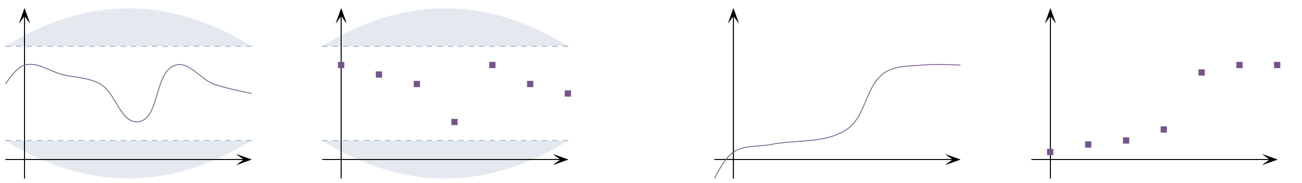
Exemple Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad$ et fixons $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Les questions qui suivent préparent le terrain de la définition de la limite.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \boxed{+1}$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$? C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\lfloor \sqrt{A} \rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$? C'est vrai si et seulement si $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, i.e. $n > -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor \boxed{+1} \right\}$. Pourquoi ce curieux maximum ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

Schématiquement, une suite peut être définie de deux façons — soit explicitement, soit implicitement par récurrence. Il n'y a pas deux sortes de suites, mais deux manières de les définir. Une suite géométrique, par exemple, peut être définie aussi bien explicitement : $\quad u_n = q^n u_0 \quad$ que par récurrence : $\quad u_{n+1} = q u_n$.

- **Suites définies explicitement :** Définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement, c'est la définir à l'aide d'une certaine fonction f par une relation $u_n = f(n)$. Il n'est alors pas difficile de calculer u_{1000}, on calcule directement $f(1000)$.

  De nombreuses propriétés de f — monotonie, signe, caractère majoré/minoré/borné — se transmettent alors telles quelles à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est après tout que la restriction de f à $\mathbb{N}$.

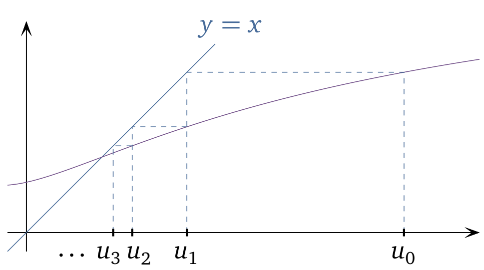


f est bornée… … donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. f est croissante… … donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

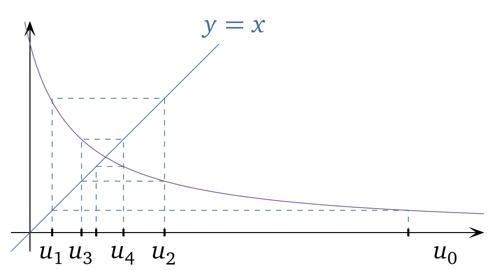
- **Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:** On peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction fixée. L'inconvénient d'une telle définition, c'est que pour calculer u_{1000}, on est obligé de calculer $u_1, \ldots, u_{999}, u_{1000}$ les uns après les autres.

Attention !

Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:	f est croissante	$\not\Longrightarrow$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
	f est décroissante	$\not\Longrightarrow$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.



f est croissante, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.



f est décroissante, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est même pas monotone.

Vous connaissez au moins deux familles simples de suites récurrentes, les *suites arithmétiques* et les *suites géométriques*.

Théorème (Suites arithmétiques/géométriques) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $q, r \in \mathbb{R}$.

- **Suites arithmétiques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison* r si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Suites géométriques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique de raison* q si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$. Dans ce cas, $u_n = q^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

S'il faut ajouter r une fois pour passer de u_n à u_{n+1}, il faut l'ajouter n fois pour passer de u_0 à u_n car $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$. Et maintenant, un peu plus général.

Définition-théorème (Suites arithmético-géométriques) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* (*de raison* a) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.

Deux situations peuvent se présenter :

— soit $a = 1$, auquel cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique,

— soit $a \neq 1$, auquel cas l'équation $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution ℓ. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de la forme $\left(\ell + \lambda a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration Supposons $a \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'équation $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ pour seule solution. Vous noterez bien que ce n'est pas du tout l'expression explicite de ℓ qui compte dans ce qui suit, mais l'égalité $a\ell + b = \ell$.

La suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$. Ainsi, $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\ell + \lambda a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple On cherche une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'équation $2x + 1 = x$ pour solution -1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda 2^n - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition initiale $u_0 = 1$ montre que $\lambda 2^0 - 1 = 1$, i.e. que $\lambda = 2$, de sorte que $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

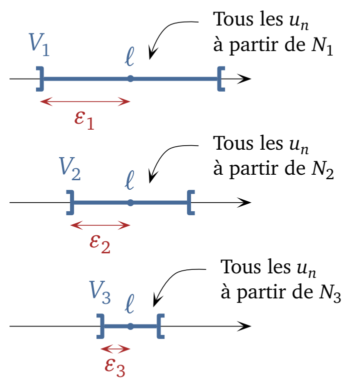
2.2 Définition de la limite

Définition (Limite d'une suite) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Définition générale :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* ℓ *pour limite*, ce qu'on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :
$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}(\ell), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in V_\ell$$
à condition de noter $\mathscr{V}(\ell)$ l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{R}$.
- **Cas particulier d'une limite finie :** Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* ℓ *pour limite* si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
- **Cas particulier de la limite $+\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $+\infty$ *pour limite* si :
$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n > A.$$
- **Cas particulier de la limite $-\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $-\infty$ *pour limite* si :
$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n < A.$$

Le point important de cette définition, c'est qu'elle s'impose à TOUT voisinage de ℓ. Un seul voisinage ne suffit pas à piéger les u_n autour de ℓ, mais si on peut exiger de TOUT voisinage, quelle que soit sa taille, qu'il contienne tous les u_n à partir d'un certain rang, alors oui, on oblige $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à tendre vers ℓ. Intuitivement, plus le voisinage V_ℓ de ℓ est petit, plus le rang N associé est grand.

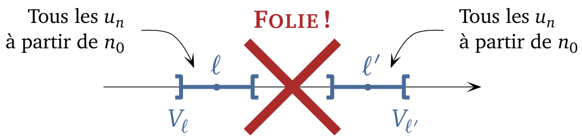
Tâchons de bien comprendre la réécriture de la définition générale dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. La définition générale exige que tout voisinage de ℓ contienne tous les u_n à partir d'un certain rang. En particulier, tout voisinage $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ doit contenir tous les u_n à partir d'un certain rang : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$. Réciproquement, si tout voisinage $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, alors tout voisinage de ℓ a plus généralement la même propriété car il contient par définition un intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$.



Les inégalités strictes $|u_n-\ell| < \varepsilon$, $u_n > A$ et $u_n < A$ peuvent être remplacées par des inégalités larges $|u_n-\ell| \leqslant \varepsilon$, $u_n \geqslant A$ et $u_n \leqslant A$, ça ne change rien. En effet, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ par exemple, si la définition de la limite est satisfaite avec des inégalités larges, tout voisinage $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient $\left[\ell-\frac{\varepsilon}{2},\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right]$, donc contient tous les u_n à partir d'un certain rang, ce qui montre que la définition de la limite est satisfaite avec des inégalités strictes.

Théorème (Unicité de la limite) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est unique et notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration Soient $\ell,\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On veut montrer, sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, que $\ell=\ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' pour lesquels $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$. Or par hypothèse, $u_n \in V_\ell$ à partir d'un certain rang N et $u_n \in V_{\ell'}$ à partir d'un certain rang N', donc $u_{n_0} \in V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ pour $n_0 = \max\left\{N,N'\right\}$ — contradiction !



Cette preuve illustre une idée importante. Si une propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie à partir d'un rang N_1, une propriété $\mathscr{P}_2$ vraie à partir d'un rang N_2… et enfin une propriété $\mathscr{P}_k$ vraie à partir d'un rang N_k, les propriétés $\mathscr{P}_1,\ldots,\mathscr{P}_k$ sont TOUTES vraies en même temps à partir du rang $\max\left\{N_1,\ldots,N_k\right\}$.

Une petite remarque en passant. Par définition de la limite, sachant que $|u_n-0| = \big||u_n|-0\big|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et maintenant, deux exemples concrets qui n'ont qu'un seul intérêt, vous aider à comprendre la définition de la limite. En pratique, on revient rarement à la définition quand on a une limite à calculer, on applique les théorèmes du chapitre.

Exemple $\dfrac{n\sin n}{n^2+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorons : $\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| = \dfrac{n\,|\sin n|}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}.$

On majore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on majore TEND TOUJOURS VERS 0.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Posons $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. À partir de N, l'inégalité $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie, donc l'inégalité $\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon$ aussi.

Exemple $\left(n^2+(-1)^n n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad n^2+(-1)^n n > A.$

Soit $A > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, minorons : $n^2+(-1)^n n \geqslant n^2-n = n(n-1) \geqslant (n-1)^2.$

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (n-1)^2 > A \quad \Longleftrightarrow \quad n > \sqrt{A}+1.$ Posons $N = \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 2$. À partir de N, l'inégalité $(n-1)^2 > A$ est vraie, donc l'inégalité $n^2+(-1)^n n > A$ aussi.

Définition (Convergence/divergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite FINIE. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

Attention ! Converger, ce n'est pas avoir une limite mais avoir une limite FINIE. Diverger, ce n'est pas avoir $\pm\infty$ pour limite, mais éventuellement NE PAS AVOIR DE LIMITE.

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Théorème (Convergence et caractère borné) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite ℓ. Pour $\varepsilon=1$, la définition de la limite affirme que $|u_n-\ell|<1$ à partir d'un certain rang N, donc pour tout $n\geqslant N$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| = \big|(u_n-\ell)+\ell\big| \leqslant |u_n-\ell|+|\ell| \leqslant |\ell|+1.$$

Le réel $K=\max\Big\{|u_0|,|u_1|,\dots,|u_{N-1}|,|\ell|+1\Big\}$ est alors plus grand que $|u_0|,\dots,|u_{N-1}|$, mais aussi que $|u_n|$ pour tout $n\geqslant N$, donc $|u_n|\leqslant K$ pour TOUT $n\in\mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Attention !

- La réciproque est fausse, la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. Par exemple, la suite $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et n'a pas de limite — que dire en effet de ses termes d'indice pair/impair ?

2.3 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ EXISTENT. Dans les tableaux ci-dessous, le symbole ??? ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination*, i.e. une impossibilité de conclure en toute généralité, qui nécessite donc un traitement au cas par cas.

Addition

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ / $+\infty$	ℓ / $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	???

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???

Multiplication par un réel

	$\lambda>0$			$\lambda=0$	$\lambda<0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

Inverse

			$u_n>0$ àpcr	$u_n<0$ àpcr	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	???

Mais finalement, c'est quoi une *forme indéterminée* ? Le symbole ??? signifie qu'en cas d'opération $(+\infty)-(+\infty)$ ou $0\times(+\infty)$, on peut obtenir a priori n'importe quel résultat.

- **Forme indéterminée** $(+\infty)-(+\infty)$ **:**
  - — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ, par exemple en soustrayant $n+\ell$ et n.
  - — On peut obtenir $\pm\infty$, par exemple en soustrayant $2n$ et n.
  - — On peut ne pas obtenir de limite, par exemple en soustrayant $n+(-1)^n$ et n.
- **Forme indéterminée** $0\times(+\infty)$ **:**
  - — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ, par exemple en multipliant $\dfrac{\ell}{n}$ et n.
  - — On peut obtenir $\pm\infty$, par exemple en multipliant $\dfrac{1}{n}$ et n^2.
  - — On peut ne pas obtenir de limite, par exemple en multipliant $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et n.

Démonstration Nous ne démontrerons pas tous les résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies :** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $\big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\big| = \big|(u_n-\ell)+(v_n-\ell')\big| \leqslant |u_n-\ell|+|v_n-\ell'|$.

  Ici, SIMPLIFIER, c'est faire apparaître les quantités $|u_n-\ell|$ et $|v_n-\ell'|$ de l'hypothèse.

  On majore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on majore TEND TOUJOURS VERS 0.

  Or par hypothèse, $|u_n-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $\big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\big| \leqslant |u_n-\ell|+|v_n-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

- **Somme d'une limite finie et d'une limite $+\infty$:** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n-\ell| < 1$ à partir d'un certain rang N, donc $u_n > \ell-1$, et $v_n > A-\ell+1$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $u_n+v_n > (\ell-1)+(A-\ell+1) = A$.

- **Somme de deux limites $+\infty$:** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$ à partir d'un certain rang N et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $u_n+v_n > A+0 = A$.

- **Produit de deux limites finies :** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $\big|u_nv_n-\ell\ell'\big| = \big|(u_n-\ell)v_n+\ell(v_n-\ell')\big| \leqslant |u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'|$.

  Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K en valeur absolue. En outre, $|u_n-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $\big|u_nv_n-\ell\ell'\big| \leqslant |u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2K}\times K+|\ell|\times\dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

- **Produit $\ell\times(+\infty)$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$:** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n-\ell| < \dfrac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang N, donc $u_n > \ell-\dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} > 0$, et $v_n > \dfrac{2A}{\ell} > 0$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $u_nv_n > \dfrac{\ell}{2}\times\dfrac{2A}{\ell} = A$.

- **Inverse d'une limite $+\infty$:** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$.

- **Inverse d'une limite finie non nulle :** On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$. Ainsi, $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant N$: $\left|\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n-\ell|}{|u_n|.|\ell|}$. Or par hypothèse, $|u_n-\ell| < \dfrac{|\ell|}{2}$ à partir d'un certain rang N', donc : $|u_n| = \big|(u_n-\ell)+\ell\big| \geqslant |\ell|-|u_n-\ell| > |\ell|-\dfrac{|\ell|}{2} = \dfrac{|\ell|}{2}$ d'après l'inégalité triangulaire, donc pour tout tout $n \geqslant \max\{N,N'\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{2}{|\ell|^2}|u_n-\ell|$. Mais comme $|u_n-\ell| < \dfrac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$ à partir d'un certain rang N'', pour tout $n \geqslant \max\{N,N',N''\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$. ■

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ — que vous connaissez intuitivement, mais qui ne sera définie proprement que dans quelques mois.

Théorème (Composition à gauche par une fonction) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément de I ou une borne de I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to\ell}{\longrightarrow} L$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.}$ Résultat à connaître !

Démonstration On peut supposer $x \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Or $\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, i.e. $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, et on compose enfin avec la limite $e^t \underset{t\to x}{\longrightarrow} e^x$.

Attention ! $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \;\not\Rightarrow\; u_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Bref, $1^{+\infty}$ est une nouvelle forme indéterminée.

2.4 Suites extraites

Définition (Fonction d'extraction, suite extraite, valeur d'adhérence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- **Fonction d'extraction :** On appelle *fonction d'extraction* toute fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- **Suite extraite :** On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans laquelle φ est une fonction d'extraction.
- **Valeur d'adhérence :** On appelle *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite d'une suite extraite CONVERGENTE de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La fonction d'extraction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2,4,5,8,24,59,\ldots)$, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2,u_4,u_5,u_8,u_{24},u_{59},\ldots)$.

La suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais que la composée $u\circ\varphi$. Si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, le résultat est $u\circ\varphi\circ\psi = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et non pas $u\circ\psi\circ\varphi = \left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

- Les suites $\left(\sqrt{2^n+4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, associées respectivement aux fonctions d'extraction $n \longmapsto 2^n+4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Les réels 1 et -1 sont donc deux valeurs d'adhérence de cette suite.

Attention ! Pour tout $k\in\mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$ et non pas u_{2k+1}. De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$ et non pas u_{2k+2}.

Théorème (Minoration des fonctions d'extraction) Soit φ une fonction d'extraction. Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration Pour tout $k\in\mathbb{N}$: $\varphi(k+1)-\varphi(k) > 0$, mais φ est à valeurs entières, donc $\varphi(k+1)-\varphi(k) \geqslant 1$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\varphi(n) = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big) \geqslant 0 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Théorème (Limites de suites extraites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite, ses suites extraites admettent aussi toutes ℓ pour limite.

En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

(ii) Si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration

(i) Faisons l'hypothèse que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit φ une fonction d'extraction. Montrons que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, $u_n \in V$ à partir d'un certain rang N, donc pour tout $n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$ par croissance de φ, donc $u_{\varphi(n)} \in V$.

(ii) Faisons l'hypothèse que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, $u_{2n} \in V$ à partir d'un certain rang N et $u_{2n+1} \in V$ à partir d'un certain rang N', donc $u_n \in V$ pour tous $n \geqslant 2N$ pair et $n \geqslant 2N'+1$ impair, donc pour tout $n \geqslant \max\left\{2N, 2N'+1\right\}$.

L'assertion (i) du théorème est souvent utilisée pour montrer qu'une suite n'a pas de limite. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Exemple La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $(-1)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors que $(-1)^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $u_{9n^2} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que :

$$u_{(3n+1)^2} = \frac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \frac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \left(n^2 + \frac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \frac{6n+1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2.5 Passage à la limite dans une inégalité et opération inverse

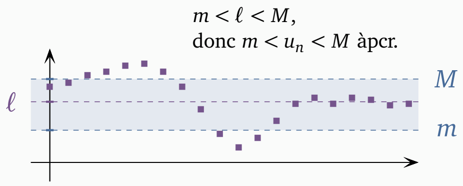
Le résultat qui suit n'est qu'une application directe de la définition de la limite et doit être perçu comme tel.

Théorème (Limites et inégalités strictes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite ℓ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $\ell > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $m < \ell < M$, alors $m < u_n < M$ à partir d'un certain rang.



Démonstration Prouvons (i). Si $\ell = -\infty$, les u_n sont tous dans le voisinage $]-\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\varepsilon = M - \ell > 0$ par hypothèse, donc les u_n sont tous dans $\big]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\big[\subset]-\infty, M[$ à partir d'un certain rang. Dans les deux cas, $u_n < M$ à partir d'un certain rang. ■

Théorème (Passage à la limite dans une inégalité large) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Ce résultat est souvent utilisé lorsque l'une des deux suites est constante.

✖ **Attention !** C'est faux avec des inégalités strictes ! Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration Par l'absurde, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) < 0$, le théorème précédent montre que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang — contradiction. ■

2.6 Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**
Si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang avec $m_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) **Théorème de minoration :**
Si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang avec $m_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**
Si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang avec $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang N, $m_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un rang N' et $M_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un rang N'', donc pour tout $n \geqslant \max\left\{N, N', N''\right\}$: $\quad \ell - \varepsilon < m_n \leqslant u_n \leqslant M_n < \ell + \varepsilon$, et enfin $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

(ii) Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang N et $m_n > A$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\left\{N, N'\right\}$: $\quad u_n \geqslant m_n > A$, $\quad$ et enfin $u_n > A$. ■

Attention ! Le théorème d'encadrement n'est pas du tout un théorème de passage à la limite. Quand on passe à la limite dans une inégalité, ON SAIT DÉJÀ que ses membres de gauche et de droite ont une limite, alors que dans le théorème d'encadrement, seules $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ sont réputées exister au départ. L'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle. Les théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration sont avant tout des théorèmes d'EXISTENCE.

Exemple $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration, car $n! \geqslant n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Théorème (Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\varepsilon_n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration Par hypothèse, il existe un réel $K\geqslant 0$ pour lequel $|u_n|\leqslant K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc après multiplication par $|\varepsilon_n|$: $0\leqslant |\varepsilon_n u_n|\leqslant K\,|\varepsilon_n|$. Ainsi, $\varepsilon_n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement car $|\varepsilon_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple $\dfrac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème (Suites géométriques) Soit $x\in\mathbb{R}$.
Le tableau ci-contre résume la situation.

Par ailleurs, si $|x|<1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

	$x>1$	$x=1$	$\lvert x\rvert<1$	$x\leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Démonstration

- **Cas où $x>1$:** $x^n = \big(1+(x-1)\big)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k \overset{x\geqslant 1}{\geqslant} \overbrace{n(x-1)}^{k=1}$, donc $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration car $x>1$.
- **Cas où $|x|<1$:** $\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après le cas précédent, donc $\left|x^n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par passage à l'inverse, i.e. $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- **Cas où $x=-1$:** Déjà été traité dans le paragraphe sur les suites extraites.
- **Cas où $x<-1$:** Comme $x^2>1$, $x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après le premier cas, puis $x^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Les suites extraites $\left(x^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas même limite, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- **Sommes géométriques :** Si $|x|<1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$.

Exemple Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta\in\,]0,1[$. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\eta$ à partir d'un certain rang N, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En quelque sorte, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et « mieux que décroissante », elle converge vers 0.
En particulier, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration Pour tout $n\geqslant N$: $\dfrac{u_{n+1}}{\eta^{n+1}}\leqslant\dfrac{u_n}{\eta^n}$, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{\eta^n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante. Positive, elle est donc bornée. Cela dit, $\eta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\eta\in\,]0,1[$, donc $u_n=\dfrac{u_n}{\eta^n}\times\eta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par produit d'une suite bornée et d'une suite convergente de limite nulle.

Théorème (Comparaison exponentielles/factorielle) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\dfrac{|x|^n}{n!}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Aussitôt : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après l'exemple précédent.

2.7 Théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes

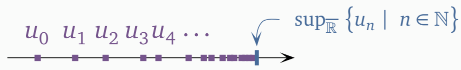
Le théorème de la limite monotone est le théorème d'**existence** de limite par excellence. Aucune hypothèse de limite n'y est faite, mais la conclusion c'est qu'une limite existe, qui surgit par magie sans qu'on en connaisse la valeur. Et d'où vient la magie en maths ? De la propriété de la borne supérieure !

Théorème (Théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite.

Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ sinon. En toute généralité, on peut donc affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \left\{u_n \mid \ n\in\mathbb{N}\right\}$.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les suites décroissantes.



Démonstration Traitons le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. L'ensemble $\left\{u_n \mid \ n\in\mathbb{N}\right\}$ est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure $\ell\in\mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne supérieure. Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de ℓ, $\ell-\varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $u_N > \ell-\varepsilon$ pour un certain $N\in\mathbb{N}$, donc pour tout $n\geqslant N$, $u_n\geqslant u_N>\ell-\varepsilon$ par croissance, donc $\ell-\varepsilon<u_n\leqslant\ell<\ell+\varepsilon$, i.e. $|u_n-\ell|<\varepsilon$.
- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée. Soit $A>0$. Comme A ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_N>A$ pour un certain $N\in\mathbb{N}$, donc pour tout $n\geqslant N$, $u_n>A$ par croissance. Comme voulu, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Attention ! Une suite croissante majorée par M converge… **mais pas forcément vers** M, qui n'est qu'un majorant parmi d'autres !

Exemple On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{\left\lfloor \mathrm{e}^k\right\rfloor}{3^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration D'après le théorème de la limite monotone, il nous suffit de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{\left\lfloor \mathrm{e}^{n+1}\right\rfloor}{3^{n+1}}\geqslant 0 \quad$ et $\quad u_n\leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^n\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^k=\frac{3}{3-\mathrm{e}}\left(1-\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n+1}\right)\leqslant\frac{3}{3-\mathrm{e}}$.

Le *théorème des suites adjacentes* que voici est utile en pratique, mais c'est plus une conséquence du théorème de la limite monotone qu'un vrai gros théorème à part entière.

Théorème (Théorème des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et si $u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le cas échéant, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.

Deux suites adjacentes viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent quelque part ! » nous dit le théorème des suites adjacentes, qui est donc lui aussi un théorème d'**existence**.

Si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et si on note ℓ leur limite commune, alors $u_m\leqslant\ell\leqslant v_n$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}$.

Démonstration Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons d'abord que $u_k\leqslant v_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\geqslant k$, $u_k\leqslant u_n$ par croissance et $v_n\leqslant v_k$ par décroissance, donc $v_k-u_k\geqslant v_n-u_n$, et ainsi $v_k-u_k\geqslant 0$ par passage à la limite.
- En retour, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_0\leqslant u_k\leqslant v_k\leqslant v_0$ par monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones bornées. Elles convergent par conséquent toutes les deux d'après le théorème de la limite monotone, disons vers ℓ_u et ℓ_v respectivement. Enfin, $\ell_u=\ell_v$ car $u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n+1)$ et $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma\approx 0,577$ qu'on appelle la *constante d'Euler*.

Démonstration Rappelons à toutes fins utiles que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1}-v_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln n = \frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0$$

et : $$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n+1) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0.$$

— Enfin : $v_n-u_n = \ln(n+1)-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2.8 Introduction aux petits o et aux équivalents

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettent toutes les deux 0 pour limite, mais la première se dirige beaucoup plus lentement vers 0 que la seconde. Les suites $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent de même $+\infty$ pour limite, mais la première explose beaucoup moins vite que la seconde. Or savoir qu'une suite tend vers $+\infty$, c'est bien, mais savoir quelle taille d'infini elle porte, c'est mieux. La branche des mathématiques qui s'intéresse à ce genre de questions s'appelle l'*analyse asymptotique* et ce paragraphe n'est qu'une parenthèse. Nous y reviendrons en détail plus tard dans l'année.

Définition (Notation des petits o et des équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

- **Négligeabilité :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On note cette relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. On dit aussi que « u_n est un petit o de v_n ».
- **Équivalence :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Les petits o donnent une nouvelle expression aux croissances comparées.

Exemple $n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^2\right)$, $\quad \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$ $\quad$ et $\quad 2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$.

Les équivalents donnent quant à eux un sens rigoureux au symbole $\approx$ de la fin du chapitre « Rappels et compléments sur les fonctions réelles ». Nous continuerons d'utiliser le symbole $\approx$ au brouillon pour faire de petits raisonnements rapides sans rigueur, mais la notation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ ne pourra au contraire être utilisée qu'avec des énoncés démontrés proprement.

Exemple $n^3+n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $\quad 4n^2+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^2$, $\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ $\quad$ et $\quad 3^n+2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$.

La notation « petit o » confronte deux suites par définition, mais on la rencontre aussi très souvent sous la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n+\mathrm{o}(w_n)$. Ce qui est affirmé le cas échéant, c'est que $u_n = v_n+\widetilde{w}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ où $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite pour laquelle $\widetilde{w}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$. La notation $\mathrm{o}(w_n)$ sous-entend que ce n'est pas tant la valeur précise de $\widetilde{w}_n$ qui nous intéresse que le fait que $\widetilde{w}_n$ est petit devant w_n.

Théorème (Les petits o sont partout) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell\in\mathbb{R}$. On suppose $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

(i) **Les limites finies cachent des petits o :** $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell+\mathrm{o}(1)$.

En particulier : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$. $\quad$ $\boxed{\mathrm{o}(1) = \text{une suite de limite nulle.}}$

(ii) **Les équivalents cachent des petits o :** $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n+\mathrm{o}(v_n)$.

Une approximation se fait toujours « à ε près » pour tel ou tel seuil ε. Dans l'assertion (ii), le $\mathrm{o}(v_n)$ doit être vu comme l'erreur qu'on commet quand on approche u_n par v_n.

Démonstration

(i) $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \frac{u_n-\ell}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n-\ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell+\mathrm{o}(1)$.

(ii) $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff \frac{u_n-v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Posons à présent $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée la *série harmonique*.

Nous avons montré un peu plus haut que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ, mais le résultat est plus lisible quand on l'écrit avec des petits o.

Théorème (Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler) Il existe un réel $\gamma \approx 0,577$, appelé *constante d'Euler*, pour lequel : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underbrace{\underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)}_{\text{Développement asymptotique}}$. En particulier : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, mais c'est moins précis.

Démonstration $H_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, donc $\frac{H_n}{\ln n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ après division par $\ln n$, donc $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. ■

Les termes du développement asymptotique ont été rangés dans l'ordre décroissant avec $\ln n$ de limite $+\infty$ en premier, puis le réel γ, puis $\mathrm{o}(1)$ de limite nulle. En première approximation, H_n est proche de $\ln n$ quand n est très grand et c'est exactement ce que l'équivalence $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ raconte. Réécrivons-la ainsi : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$. Le $\mathrm{o}(\ln n)$ cache une quantité très petite devant $\ln n$, mais on ne sait pas laquelle.

Le développement : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$ est plus précis car il nous dévoile l'intérieur du $\mathrm{o}(\ln n)$. Quand on observe H_n pour n très grand, c'est $\ln n$ qu'on voit en premier, mais si on fronce les sourcils, on aperçoit γ derrière. On peut d'ailleurs zoomer davantage, mais c'est plus difficile à prouver : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2.9 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il ne suffit pas de se donner une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in E$, puis de décréter que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il faut être sûr que u_n reste dans E à chaque étape, sans quoi on ne peut pas calculer $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème (Existence de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$) Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une fonction — ainsi E est stable par f.

Pour tout $a \in E$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans E et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ termes}}(u_0)$.

La conclusion selon laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans E est utile quand on veut montrer qu'elle est minorée/majorée/bornée. Par exemple, si $E = [1,3]$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bornée entre 1 et 3. Pas de récurrence, juste un petit argument de stabilité !

Exemple Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration D'une part $1 \in \mathbb{R}_+$, d'autre part $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ car pour tout $x \geqslant 0$, donc $\ln(1+x) \geqslant 0$.

On s'intéresse à présent à la convergence des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sur deux exemples simples.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone. Montrons que $\ell = +\infty$.

Or par l'absurde, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \mathrm{e}^{u_n}\right) = \ell + \mathrm{e}^{\ell}$ car $\mathrm{e}^x \underset{x\to\ell}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$, donc $\mathrm{e}^{\ell} = 0$ — contradiction !

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.

Démonstration $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$ et $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \leqslant 0$. Décroissante positive, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc d'après le théorème de la limite monotone, et en notant ℓ sa limite : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n^2} = \frac{\ell}{1+\ell^2}$, donc $\ell - \frac{\ell}{1+\ell^2} = \frac{\ell^3}{1+\ell^2} = 0$, i.e. $\ell = 0$.

Théorème (Monotonie d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$) Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une fonction — ainsi E est stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

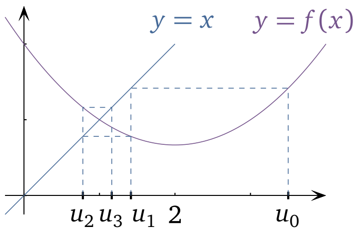
(i) Si $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ nous renseigne donc sur la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si f est croissante sur E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.

(iii) Si f est décroissante sur E, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

À propos des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, elles sont récurrentes elles aussi comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais associées à la fonction $\boxed{f \circ f}$ et non pas à la fonction f. En effet, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$.

Attention ! La monotonie de f et le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ ne peuvent être exploités QUE SUR UN DOMAINE STABLE PAR f.



Sur la figure ci-contre, f est croissante sur $[2, +\infty[$ et $u_0 \in [2, +\infty[$, mais $[2, +\infty[$ n'est pas stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quitte $[2, +\infty[$ dès le rang 1. La croissance de f sur $[2, +\infty[$ n'a ainsi aucun impact sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dès lors que ses termes vivent leur vie ailleurs.

Démonstration La stabilité de E par f montre que $u_n \in E$ POUR TOUT $n \in \mathbb{N}$. Sans cela, nous ne pourrions pas exploiter les propriétés de f sur E.

(i) Si $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in E$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) Supposons f croissante avec $u_0 \leqslant u_1$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$.

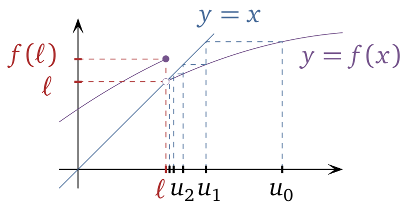
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors par croissance de f : $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

(iii) Supposons f décroissante avec $u_0 \leqslant u_2$. Dans ces conditions, $f \circ f$ est croissante et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente associée à la fonction $f \circ f$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après (ii). Il en découle que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décroissance de f : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$.

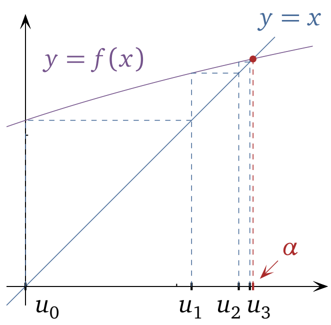
Théorème (Limite d'une suite récurrente convergente $u_{n+1} = f(u_n)$) Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une fonction — ainsi E est stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et si f est CONTINUE en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, autrement dit $f(\ell) = \ell$.

Attention ! L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer. Sur la figure ci-contre, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ mais $f(\ell) \neq \ell$.

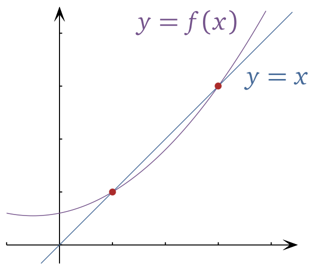


Démonstration $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ car $f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, mais par ailleurs $f(u_n) = u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, donc $f(\ell) = \ell$ par unicité de la limite.



Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ sur $]-3, +\infty[$.

- La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - x$ est à la fois continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = \ln 3$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, disons en α — l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons que $[0, \alpha]$ est stable par f. Or pour tout $x \in [0, \alpha]$: $f(x) \in [0, \alpha]$ car $0 \leqslant \ln 3 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha$ par croissance de f.
- Maintenant que $[0, \alpha]$ est stable par f, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0, \alpha]$ car $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$. Or g est positive sur $[0, \alpha]$, donc $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0, \alpha]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par α, elle converge d'après le théorème de la limite monotone et sa limite est un point fixe de f par continuité de f — forcément α.



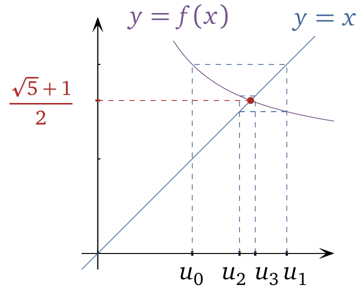
Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 3}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut connaître, en fonction de u_0, la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle. On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+3}{5}$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{5} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{5}$, donc f admet 1 et 3 pour points fixes et son graphe est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[3, +\infty[$, et en-dessous sur $[1, 3]$.

  Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant 0$, donc comme $\mathbb{R}_+$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est piégée dans $\mathbb{R}_+$ à partir du rang 1, raison pour laquelle on étudie essentiellement ci-dessous le cas d'un réel u_0 positif.

  Les distinctions qui suivent reposent sur le fait que les ensembles $[0, 1]$, $]1, 3[$, $\{3\}$ et $]3, +\infty[$ sont stables par f. Il est essentiel de le préciser si on veut pouvoir y exploiter la monotonie de f ou le signe de $x \longmapsto f(x) - x$.
- **Cas où $u_0 \in [0, 1]$:** $[0, 1]$ est stable par f et $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois croissante et bornée entre 0 et 1, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Sa limite est un point fixe de f dans $[0, 1]$ par continuité de f — forcément 1. Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- **Cas où $u_0 \in]1, 3[$:** $]1, 3[$ est stable par f et $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in]1, 3[$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois décroissante et bornée entre 1 et 3, donc converge vers un élément de $[1, 3[$ — ouvert en 3 par décroissance, mais fermé en 1, attention. Plus précisément, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f dans $[1, 3[$ par continuité de f — forcément 1. Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- **Cas où $u_0 = 3$:** Cette fois, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur 3, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
- **Cas où $u_0 > 3$:** $]3, +\infty[$ est stable par f et $f(x) \geqslant x$ pour tout $x > 3$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite. Sa limite ℓ est dans $]3, +\infty[$ par croissance, mais f n'a pas de point fixe dans cet intervalle, donc $\ell = +\infty$. Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- **Cas restants :** À ce stade : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } u_0 \in [0, 3[\\ 3 & \text{si } u_0 = 3 \\ +\infty & \text{si } u_0 > 3. \end{cases}$

  En outre, nous avons déjà observé que si $u_0 < 0$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant 0$, mais dans quel intervalle précis u_1 atterrit-il parmi $[0, 3[$, $\{3\}$ et $]3, +\infty[$? Pour tout $x < 0$: $f(x) - 3 = \dfrac{x^2 + x - 12}{5} = \dfrac{(x+4)(x-3)}{12}$, donc :
  - si $u_0 < -4$, alors $u_1 = f(u_0) > 3$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  - si $u_0 = -4$, alors $u_1 = f(u_0) = 3$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$,
  - si $u_0 \in]-4, 0[$, alors $u_1 = f(u_0) < 3$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.



Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- L'intervalle $[1, 2]$ est stable par f et $u_0 \in [1, 2]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée entre 1 et 2. Ensuite, f est décroissante sur le domaine stable $[1, 2]$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Bornées, ces deux suites convergent, disons vers ℓ et ℓ' respectivement.

  Notez que le sens de variation précis des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne nous intéresse pas ici, mais si on le veut, il suffit de comparer u_0 et u_2, et nn l'occurrence $u_2 \geqslant u_0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croît et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.
- À présent, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$, leurs limites ℓ et ℓ' sont des points fixes de $\boxed{f \circ f}$ — attention ! — mais nous allons voir que f possède exactement un point fixe, à savoir $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Il en découlera que $\ell = \ell' = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

  Or pour tout $x \in [1, 2]$: $f \circ f(x) = x \iff 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \overset{x\in[1,2]}{\iff} x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2.10 Théorème de Cesàro

Théorème (Théorème de Cesàro) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, la plupart des réels $u_1,\ldots,u_n$ sont proches de ℓ pour n très grand, donc leur moyenne $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$ est elle aussi proche de ℓ.

Démonstration

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:** Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$, il nous suffit de prouver le résultat sous l'hypothèse que $\ell=0$. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la limite, il existe un rang N à partir duquel $|u_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n\geqslant N$, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^N |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^n |u_k| < \frac{M}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}\times\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si on pose } M=\sum_{k=1}^N |u_k|.$$
Or M est indépendant de n, donc $\dfrac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N'. Finalement, pour tout $n\geqslant \max\{N,N'\}$: $\quad \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$
- **Cas où $\ell=\pm\infty$:** Il nous suffit de traiter le cas $+\infty$, car si $\ell=-\infty$ et si on a déjà traité le cas $+\infty$, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite, donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n(-u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, i.e. $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
Soit $A>0$. Par définition de la limite, il existe un rang N à partir duquel $u_n>A+1$. Pour tout $n\geqslant N$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^N u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^n u_k > \frac{M}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^n (A+1) = \frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}\times(A+1) \qquad \text{si on pose } M=\sum_{k=1}^N |u_k|.$$
Or M est indépendant de n, donc $\left(\dfrac{M}{n}+\dfrac{n-N}{n}\times(A+1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A+1>A$, donc $\dfrac{M}{n}+\dfrac{n-N}{n}\times(A+1)>A$ à partir d'un certain rang N'. Finalement, pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $\quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k > A.$

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On cherche sa limite, et même un équivalent, ce qui est plus fin.

- Notons f la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bien définie et positive car $\mathbb{R}_+$ est stable par f et contient 1. Ensuite, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $u_1=\sqrt{2}\geqslant u_0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone. En l'occurrence, $\ell\in[1,+\infty]$ par croissance. Or si $\ell\in[1,+\infty[$, alors $\sqrt{\ell^2+\ell}=\ell$ par continuité de f en ℓ, donc $\ell^2+\ell=\ell^2$, donc $\ell=0$, ce qui est faux. Conclusion : $\quad \ell=+\infty$.
- Exploitons maintenant le théorème de Cesàro pour aller plus loin et obtenir un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. C'est parti : $\quad u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n^2+u_n}-u_n=\dfrac{\left(u_n^2+u_n\right)-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$,
donc d'après le théorème de Cesàro : $\quad \dfrac{u_n-u_0}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n(u_k-u_{k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}.\quad$ Finalement :
$$\frac{u_n}{n}=\frac{u_n-u_0}{n}+\frac{u_0}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}, \qquad \text{donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

2.11 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure

« Caractérisation séquentielle » signifie « caractérisation en termes de suites ».

Théorème (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M\in\mathbb{R}$.

(i) $\sup A=M$ si et seulement si $\begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A. \end{cases}$

(ii) A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

On dispose bien sûr de résultats analogues sur les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration

(i) Supposons d'abord que $\sup A = M$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{n}$ ne majore pas A, donc $a_n > M - \frac{1}{n}$ pour un certain $a_n \in A$. Ainsi, $M - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$ par encadrement.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que M majore A et est la limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A. Pour tout majorant M' de A, $a_n \leqslant M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $M \leqslant M'$ par passage à la limite. En d'autres termes, M est le plus petit majorant de A, donc $M = \sup A$.

(ii) Supposons d'abord que A n'est pas majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas A, donc $a_n > n$ pour un certain $a_n \in A$, donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration. La réciproque est triviale. ■

Exemple Si on note A l'ensemble $\left\{ \frac{q^2}{2^p + q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$, alors A n'est pas majoré, mais $\inf A = 0$.

Démonstration D'abord, A n'est pas majoré car il contient une suite de limite $+\infty$: $\frac{n^2}{2^1 + n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrons maintenant que $\inf A = 0$. Or $\frac{q^2}{2^p + q} \geqslant 0$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ et : $\frac{1}{2^n + 1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc A est minoré par 0 et contient une suite de limite 0.