Topologie de ℝ et ℂ

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour le dire vite, la *topologie* est la théorie mathématique de la proximité des objets les uns par rapport aux autres. Pour cette raison, les concepts de voisinage et de limite d'une suite du chapitre « Suites réelles » sont typiquement topologiques. On les étend ici à $\mathbb{C}$ et on en introduit d'autres pour comprendre plus finement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ d'un point de vue topologique.

En deuxième année, vous ré-étudierez les concepts de ce chapitre dans le cadre plus général des *espaces vectoriels normés*.

Définition (Espace vectoriel normé) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *norme sur E* toute application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

— pour tout $x \in E$: $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (*séparation*),

— pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ (*homogénéité*),

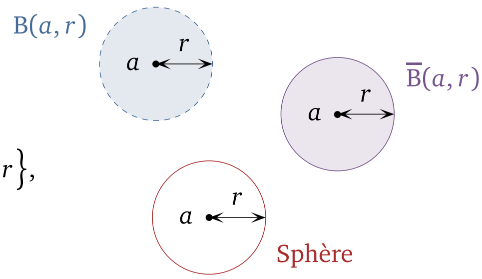
— pour tous $x, y \in E$: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Le cas échéant, le couple $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est appelé un *espace vectoriel normé*.

Les couples $\big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$ et $\big(\mathbb{C}, |\cdot|\big)$ sont des espaces vectoriels normés et ce chapitre leur est consacré.

1 Boules, voisinages et suites convergentes

1.1 Boules et voisinages



Le vocabulaire des *boules* et des *sphères* évoque l'espace $\mathbb{R}^3$ plutôt que la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{C}$, mais l'usage de ces mots est aujourd'hui fixé en topologie et utilisé dans tout espace vectoriel normé indépendamment de la dimension. Pour tous $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$, on appelle :

— *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble $\mathrm{B}(a, r) = \big\{x \in \mathbb{K} \mid \ |x - a| < r\big\}$,

— *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble $\overline{\mathrm{B}}(a, r) = \big\{x \in \mathbb{K} \mid \ |x - a| \leqslant r\big\}$,

— *sphère de centre a et de rayon r* l'ensemble $\big\{x \in \mathbb{K} \mid \ |x - a| = r\big\}$.

Les boules fermées de rayon 0 sont autorisées, ce sont des singletons : $\overline{\mathrm{B}}(a, 0) = \big\{a\big\}$.

On a représenté ci-dessus des boules dans $\mathbb{C}$ et on représentera souvent les objets dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$ dans ce chapitre, mais les boules ne sont jamais que des intervalles dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{B}(a, r) =]a - r, a + r[$ et $\overline{\mathrm{B}}(a, r) = [a - r, a + r]$.

La définition suivante ne devrait pas trop vous dépayser.

Définition (Voisinage d'un point) Soit $a \in \mathbb{K}$. On appelle *voisinage de a* toute partie de $\mathbb{K}$ contenant une boule ouverte de centre a. On notera parfois $\mathscr{V}_{\mathbb{K}}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{K}$, mais la notation n'est pas universelle.

Nous n'aurons pas de voisinages de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$ dans ce chapitre car nous nous efforçons de comprendre ce que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ont de commun d'un point de vue topologique.

Théorème (Propriétés des voisinages)

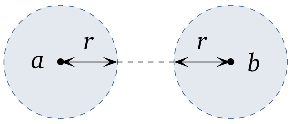
(i) Pour tout $a \in \mathbb{K}$, toute intersection FINIE de voisinages de a est un voisinage de a.

(ii) Deux points distincts de $\mathbb{K}$ possèdent des voisinages disjoints. En d'autres termes, pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b pour lesquels $V_a \cap V_b = \varnothing$.

Démonstration

(i) Soient $a \in \mathbb{K}$ et $V_1, \ldots, V_k$ des voisinages de a. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, il existe un réel $r_i > 0$ pour lequel $\mathrm{B}(a, r_i) \subset V_i$, donc $\mathrm{B}(a, r_0) \subset V_1 \cap \ldots \cap V_k$ pour $r_0 = \min\left\{r_1, \ldots, r_k\right\} > 0$, donc $V_1 \cap \ldots \cap V_k$ est un voisinage de a.

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Pour $r = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$, $\mathrm{B}(a,r)$ est un voisinage de a, $\mathrm{B}(b,r)$ un voisinage de b, et bien sûr $\mathrm{B}(a,r) \cap \mathrm{B}(b,r) = \varnothing$.



1.2 Suites convergentes

Définition-théorème (Suite convergente/divergente, limite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* ou *converge* s'il existe un élément $\ell \in \mathbb{K}$ pour lequel : $\forall V_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{K}}(\ell), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in V_\ell,$

i.e. : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$

Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* ou *diverge*.

(i) **Limite :** S'il existe, l'élément ℓ de la définition précédente est unique, appelé la *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(ii) **Caractérisation par les parties réelle et imaginaire :** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell).$$

Démonstration

(i) Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$. On veut montrer, sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, que $\ell = \ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' pour lesquels $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$. Or par hypothèse, $u_n \in V_\ell$ à partir d'un certain rang N et $u_n \in V_{\ell'}$ à partir d'un certain rang N', donc $u_{n_0} \in V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ pour $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$ — contradiction !

(ii) Faisons l'hypothèse que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big| = \big|\mathrm{Re}(u_n - \ell)\big| \leqslant |u_n - \ell|$, donc $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell)$ d'après le théorème d'encadrement pour les suites réelles.

Réciproquement, si $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell)$, alors par de simples opérations :

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)\big)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{0^2 + 0^2} = 0, \qquad \text{donc } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Définition-théorème (Suite bornée) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à valeurs dans une boule fermée, ce qui revient à dire que : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.

Démonstration Si la proposition $\exists K \geqslant 0\ldots$ est vraie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}(0,K)$. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ pour certains $a \in \mathbb{K}$ et $r \geqslant 0$, elle est aussi à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}\big(0, |a|+r\big)$ car $\overline{\mathrm{B}}(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}}\big(0, |a|+r\big)$. En effet, pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}(a,r)$: $|x| = |a + x - a| \leqslant |a| + |x-a| \leqslant |a| + r$.

Théorème (Convergence et caractère borné) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. En particulier, $u_n \in \mathrm{B}(\ell,1) \subset \overline{\mathrm{B}}(\ell,1)$ à partir d'un certain rang, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans une boule fermée, donc est bornée.

On démontre comme au chapitre « Suites réelles » que toute combinaison linéaire et tout produit de suites convergentes sont convergents et que l'inverse d'une suite convergente de limite non nulle est bien définie à partir d'un certain rang et convergente. En particulier, l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1.3 Valeurs d'adhérence

Rappelons qu'une fonction d'extraction est par définition une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En outre, pour une telle fonction φ, $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition-théorème (Suite extraite, valeur d'adhérence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- **Suite extraite :** On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans laquelle φ est une fonction d'extraction.
- **Valeur d'adhérence :** Soit $x \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) x est la limite d'une suite extraite CONVERGENTE de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  (ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \geqslant N, \quad u_n \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$.

  Le cas échéant, on dit que x est une *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'assertion (ii) exige que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe aussi près de x qu'on le souhaite et y revienne indéfiniment.

Attention ! Par définition, $\pm\infty$ ne sont jamais des valeurs d'adhérence. Ainsi, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, mais cela ne l'empêche pas d'être de limite $+\infty$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Faisons l'hypothèse que x est la limite d'une suite extraite convergente $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Aussitôt, $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang N'. Par ailleurs, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ pour tout $n \geqslant \max\left\{N, N'\right\}$. Pour $n = \varphi\big(\max\left\{N,N'\right\}\big)$, on peut donc affirmer à la fois que $|u_n - x| < \varepsilon$ et $n \geqslant N$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Faisons l'hypothèse que : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \geqslant N, \quad u_n \in \mathrm{B}(x,\varepsilon) \quad \bigstar$ et tirons-en par récurrence une fonction d'extraction φ pour laquelle $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découlera comme voulu que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Pour $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, $\bigstar$ nous offre un entier naturel $\varphi(0)$ pour lequel $\left|u_{\varphi(0)} - x\right| < 1$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Si on a réussi à construire des entiers naturels $\varphi(0),\ldots,\varphi(n)$ pour lesquels $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ et $\left|u_{\varphi(k)} - x\right| \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, alors pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n+2}$ et $N = \varphi(n)+1$, $\bigstar$ nous offre un entier $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ pour lequel $\left|u_{\varphi(n+1)} - x\right| < \dfrac{1}{n+2}$. La fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ainsi construite est strictement croissante et $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Théorème (Limites de suites extraites) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ses suites extraites convergent aussi vers la même limite. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une et une seule valeur d'adhérence, à savoir sa limite.

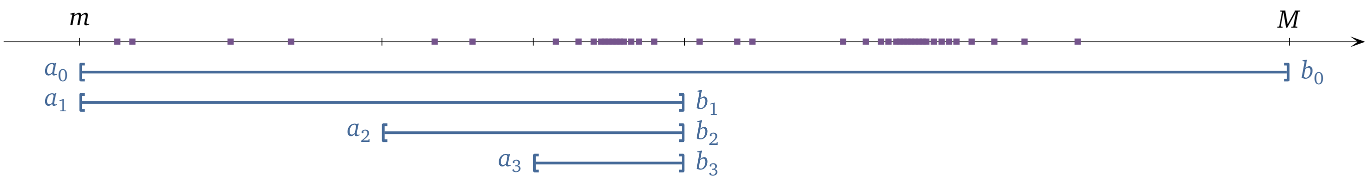
Démonstration Faisons l'hypothèse que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit φ une fonction d'extraction. Montrons que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, $u_n \in V$ à partir d'un certain rang N, donc pour tout $n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$ par croissance de φ, donc $u_{\varphi(n)} \in V$. ∎

Attention ! Une suite peut posséder une et une seule valeur d'adhérence sans converger. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet 0 pour seule valeur d'adhérence, mais ne converge pas.

Le *théorème de Bolzano-Weierstrass* nous apprend maintenant qu'une suite a seulement besoin d'être bornée pour posséder une valeur d'adhérence. On peut le voir comme une réciproque partielle du résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée possède une valeur d'adhérence. En d'autres termes, de toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

En résumé, les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler quelque part autour d'au moins un point.



Démonstration

- **Cas où** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée entre m et M avec $m \leqslant M$. Nous cherchons une fonction d'extraction φ pour laquelle $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire φ pas à pas par *dichotomie*. En guise d'initialisation, posons $a_0 = m$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons l'hypothèse qu'on a réussi à définir des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ et des entiers naturels $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ pour lesquels :

  (i) $\quad a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \quad$ et $\quad b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0$,

  (ii) $\quad$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad b_k - a_k = \dfrac{M-m}{2^k}$,

  (iii) $\quad$ l'ensemble d'indices $\big\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_k, b_k]\big\}$ est infini pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

  (iv) $\quad$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$,

  (v) $\quad \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$.

  Sous cette hypothèse, tâchons de construire deux réels a_{n+1}, b_{n+1} et un entier $\varphi(n+1)$ qui rendent vraies les assertions (i) à (v) au rang $n+1$. Le point important, c'est que l'un au moins des ensembles :
  $$\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \qquad \text{et} \qquad \left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$$
  est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion $\big\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_n, b_n]\big\}$ le serait aussi et cela contredirait (iii). Posons donc :
  $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit) \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$$
  Par construction, l'ensemble d'indices $\big\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\big\}$ est infini, donc après suppression des indices inférieurs à $\varphi(n)$, en nombre fini, l'ensemble $\big\{i \in \mathbb{N} \mid \ i > \varphi(n) \text{ et } u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\big\}$ est lui aussi une partie infinie de $\mathbb{N}$. Sélectionnons-y un élément quelconque $\varphi(n+1)$, par exemple le plus petit élément.

  Assertion (i) **au rang** $n+1$ **:** $a_n \leqslant b_n$ d'après (ii), donc $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$, donc $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ dans les deux cas $\spadesuit$ et $\clubsuit$.

  Assertion (ii) **au rang** $n+1$ **:** $\quad b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & \text{dans le cas } \spadesuit \\ b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & \text{dans le cas } \clubsuit. \end{cases}$

  Assertion (iii) **au rang** $n+1$ **:** Déjà fait.

  Assertions (iv) **et** (v) **au rang** $n+1$ **:** Vraies par définition de $\varphi(n+1)$.

  Fin de la construction. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes grâce aux assertions (i) et (ii), donc convergentes de même limite un certain réel ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. L'encadrement $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre finalement que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- **Cas où** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée par K en module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|\mathrm{Re}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \leqslant K$ et $\big|\mathrm{Im}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \leqslant K$, donc les suites $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réelles bornées. D'après le cas réel du théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $\Big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour une certaine fonction d'extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Notons a sa limite.

  La suite $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a de son côté aucune raison de converger, mais elle est toujours bornée, donc de nouveau d'après le cas réel du théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour une nouvelle fonction d'extraction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Notons b sa limite.

  Conclusion : $\quad u_{\varphi\circ\psi(n)} = \mathrm{Re}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \mathrm{i}b.$ ■

✖ **Attention !** Dans le passage du cas réel au cas général, on a procédé à deux extractions **SUCCESSIVES** et c'est la seule idée qu'il faut en retenir. Au départ, il est normal de vouloir extraire indépendamment une suite convergente $\Big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et une autre $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\psi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, mais si φ et ψ n'ont qu'un nombre fini de valeurs en commun, on n'en tire aucune suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même. Pensez aux fonctions $n \overset{\varphi}{\longmapsto} 2n$ et $n \overset{\psi}{\longmapsto} 2n+1$.

Exemple Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ pour limite, elle possède une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont ℓ n'est pas valeur d'adhérence.

Démonstration Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel : $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon_0 \quad \bigstar$. En d'autres termes, on peut trouver des rangs aussi grands qu'on veut pour lesquels $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon_0$. Tirons-en par récurrence une fonction d'extraction φ pour laquelle $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, toute valeur d'adhérence ℓ' de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfera l'inégalité $|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon_0$, donc sera distincte de ℓ.

Pour $N = 0$, $\bigstar$ nous offre un entier naturel $\varphi(0)$ pour lequel $\left|u_{\varphi(0)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon_0$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Si on a réussi à construire des entiers naturels $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ pour lesquels $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ et $\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors pour $N = \varphi(n)+1$, $\bigstar$ nous offre un entier naturel $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ pour lequel $\left|u_{\varphi(n+1)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon_0$. La fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ainsi construite est strictement croissante et $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (Un critère de convergence) Toute suite bornée qui possède au plus une valeur d'adhérence converge.

L'hypothèse bornée est essentielle car une suite réelle de limite $+\infty$ n'a pas de valeur d'adhérence et ne converge pas.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence ℓ. Par contraposition, faisons l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et montrons qu'elle possède une autre valeur d'adhérence, distincte de ℓ. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant pas, elle n'admet pas ℓ pour limite. D'après l'exemple précédent, elle possède donc une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont ℓ n'est pas valeur d'adhérence. Cela dit, $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore bornée, donc possède une valeur d'adhérence ℓ' d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass et $\ell' \neq \ell$ par définition de φ. Finalement, ℓ' étant aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons déniché deux valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

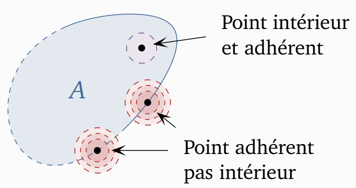
2 Ouverts, fermés, compacts

2.1 Points intérieurs, points adhérents

Définition (Point intérieur/adhérent à une partie) Soit A une partie de $\mathbb{K}$.

- **Point intérieur :** Soit $x \in \mathbb{K}$. On dit que x est *intérieur à A* si A est un voisinage de x, i.e. si : $\exists\, r > 0, \quad \mathrm{B}(x, r) \subset A$. En particulier, $x \in A$.
- **Point adhérent :** Soit $x \in \mathbb{K}$. On dit que x est *adhérent à A* si A rencontre tout voisinage de x, i.e. si : $\forall r > 0, \quad A \cap \mathrm{B}(x, r) \neq \varnothing$.

  En particulier, tout élément de A est adhérent à A.



En termes imagés, x est intérieur à A s'il appartient à A sans être au bord de A, et adhérent à A s'il appartient à A ou se trouve au bord de A.

Théorème (Caractérisation séquentielle des points adhérents) Soient A une partie de $\mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) x est adhérent à A. (ii) x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si x est adhérent à A, le voisinage $\mathrm{B}\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ de x contient un élément a_n de A pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|a_n - x| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Faisons l'hypothèse que x est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Soit V_x un voisinage de x. Par définition de la limite, $a_n \in V_x$ à partir d'un certain rang N, donc V_x contient un élément de A. Ainsi, tout voisinage de x contient un élément de A, donc x est adhérent à a.

Exemple Pour toute partie non vide bornée A de $\mathbb{R}$, $\inf A$ et $\sup A$ sont adhérents à A d'après la caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure.

Définition (Intérieur, adhérence et frontière d'une partie) Soit A une partie de $\mathbb{K}$.

- **Intérieur :** L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'*intérieur de A* et noté $\mathring{A}$.
- **Adhérence :** L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'*adhérence de A* et noté $\overline{A}$.
- **Frontière :** L'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé la *frontière de A*.

De toute évidence : $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$, et pour toute partie B de $\mathbb{K}$ contenant A : $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Exemple Dans $\mathbb{R}$, pour tout intervalle non vide borné I : $\mathring{I} =]\inf I, \sup I[$ et $\overline{I} = [\inf I, \sup I]$.
De même, pour tout intervalle non vide non majoré : $\mathring{I} =]\inf I, +\infty[$ et $\overline{I} = [\inf I, +\infty[$.

Démonstration Contentons-nous du cas d'un intervalle non vide borné I et posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

- Montrons que $\mathring{I} =]a,b[$. Pour commencer, $\mathring{I} \subset I \subset [a,b]$, mais $a \notin \mathring{I}$ car $\mathrm{B}(a,r) =]a-r, a+r[$ n'est inclus dans $]a,b[$ pour aucun $r > 0$. De même, $b \notin \mathring{I}$ donc $\mathring{I} \subset]a,b[$. Inversement, pour tout $x \in]a,b[$, $\mathrm{B}(x,r) \subset]a,b[\subset I$ pour $r = \dfrac{1}{2} \min\left\{x-a, b-x\right\} > 0$, donc $]a,b[\subset \mathring{I}$.
- Montrons que $\overline{I} = [a,b]$. Pour commencer, $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{I}$ d'après la caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure, donc $[a,b] \subset \overline{I}$. Inversement, pour tout $x \in \overline{I}$, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, donc $x \in [a,b]$ par passage à la limite, donc $\overline{I} \subset [a,b]$.

2.2 Parties denses

Définition-théorème (Partie dense dans une autre) Soit A une partie de $\mathbb{K}$. On dit que A est *dense dans* $\mathbb{K}$ si tout élément de $\mathbb{K}$ est adhérent à A, i.e. si $\overline{A} = \mathbb{K}$.

Plus généralement, soit B une partie de $\mathbb{K}$ contenant A. On dit que A est *dense dans* B si tout élément de B est adhérent à A, i.e. si $B \subset \overline{A}$.

Caractérisation séquentielle de la densité : A est dense dans B si et seulement si tout élément de B est la limite d'une suite d'éléments de A.

En termes simples, A est dense dans B si A est un peu partout dans B sans être forcément B tout entier.

Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert non vide $]x,y[$ est une boule ouverte de centre $\dfrac{x+y}{2}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, i.e. si et seulement si on peut toujours trouver un élément de A entre deux réels distincts. Grâce à cette reformulation, nous connaissons déjà deux exemples importants de parties denses de $\mathbb{R}$, obtenus au chapitre « Suites réelles ».

Théorème (Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

On appelle à présent *décimal* tout rationnel $\dfrac{p}{10^n}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Certains rationnels ne sont pas décimaux, tels $\dfrac{1}{3}$. Quant à l'ensemble des décimaux, c'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

Théorème (Densité de l'ensemble des décimaux) L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

En montrant que l'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, on redémontre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, si tout réel est la limite d'une suite de décimaux, alors tout réel est en particulier la limite d'une suite de rationnels.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$, donc $x - \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$, donc par encadrement, x est la limite de la suite de décimaux $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Concrètement, pour $x = \pi$: $\dfrac{\lfloor 10^0 x \rfloor}{10^0} = 3$, $\dfrac{\lfloor 10^1 x \rfloor}{10^1} = 3,1$, $\dfrac{\lfloor 10^2 x \rfloor}{10^2} = 3,14$, $\dfrac{\lfloor 10^3 x \rfloor}{10^3} = 3,141$, $\dfrac{\lfloor 10^4 x \rfloor}{10^4} = 3,1415$, etc.

Et maintenant, en vue du théorème qui suit, observons que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$ Bref : $0,9999\ldots = 1.$

Définition-théorème (Développement décimal illimité d'un réel) Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) **Existence :** Il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers compris entre 0 et 9 pour laquelle $x = \lfloor x \rfloor + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

(ii) **Unicité :** Si x n'est pas décimal, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est unique. Si au contraire x est décimal, deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ peuvent être choisies, une qui prend la valeur 0 à partir d'un certain rang et l'autre qui prend la valeur 9 à partir d'un certain rang.

On appelle *développement décimal illimité* d'un réel toute écriture du genre $\pi = 3,141592\ldots$ dont l'assertion (i) garantit l'existence. Attention, l'unicité n'est pas garantie et c'est choquant la première fois, car dans les petites classes, les réels ont tendance à être identifiés aux développements décimaux illimités. En réalité, les développements décimaux illimités ne sont qu'une représentation des réels et pas les réels eux-mêmes. Pour un non-décimal, on dit « LE développement décimal illimité » car il n'y en a qu'un, mais pour les décimaux, on appelle développement décimal illimité *propre* celui qui s'achève par des 0 et développement décimal illimite *impropre* celui qui s'achève par des 9. La mécanique du dédoublement est toujours la même : $1 = 0{,}9999\ldots$, $2{,}7 = 2{,}69999\ldots$ $12{,}584 = 12{,}5839999\ldots$

Démonstration

(i) Posons $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant 10 \times 10^{n-1} = 10^n$ et $10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ est un entier, donc $10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor$, autrement dit $a_n \geqslant 0$. Dans l'autre sens, $a_n < 10^n x - 10 \times \left(10^{n-1} x - 1\right) = 10$, donc a_n est un entier compris entre 0 et 9. Finalement :
$$\lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - \frac{\lfloor 10^{n-1} x \rfloor}{10^{n-1}}\right) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

(ii) Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'entiers compris entre 0 et 9 pour lesquelles :
$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

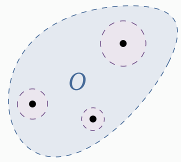
Supposons $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \neq (b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. L'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ a_k \neq b_k\right\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément p, et quitte à permuter $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $a_p > b_p$. Pour tout $n \geqslant p+1$:
$$\frac{a_p}{10^p} = \frac{b_p}{10^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} \leqslant \frac{b_p}{10^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{b_p}{10^p} + \frac{9}{10^{p+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{b_p}{10^p} + \frac{1}{10^p},$$
donc $a_p \leqslant b_p + 1$ après passage à la limite, puis $a_p = b_p + 1$ car $a_p > b_p$. En retour :
$$\frac{1}{10^p} = \frac{a_p - b_p}{10^p} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{p+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^p},$$
donc $b_k - a_k = 9$ pour tout $k \geqslant p+1$, sans quoi les termes extrémaux ne seraient pas égaux. Finalement, a_k et b_k étant compris entre 0 et 9, $a_k = 0$ et $b_k = 9$ pour tout $k \geqslant p+1$, donc $x = \lfloor x \rfloor + \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{10^k}$, ce qui montre que x est décimal. Conclusion : si x possède au moins deux développements décimaux illimités distincts, alors x est décimal et ne possède que deux développements décimaux illimités, un qui s'achève par des 0 rang et un qui s'achève par des 9. Réciproquement, il reste à vérifier que si x est décimal, il possède bien deux développements décimaux illimités de ce genre, mais ne perdons pas de temps.

2.3 Ouverts

Définition **(Ouvert)** Soit O une partie de $\mathbb{K}$.

On dit que O est un *ouvert* si : $\quad \forall x \in O, \quad \exists r > 0, \quad \mathrm{B}(x, r) \subset O$.

Il est équivalent de dire que O est un voisinage de chacun de ses points, ou encore que $\overset{\circ}{O} = O$, i.e. que tout point de O lui est intérieur.



Exemple $\varnothing$ et $\mathbb{K}$ sont des ouverts.

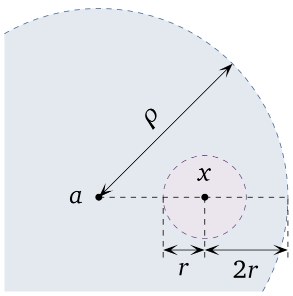
Théorème **(Exemples d'ouverts)**

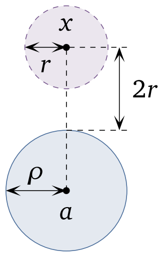
(i) Toute boule ouverte est ouverte.

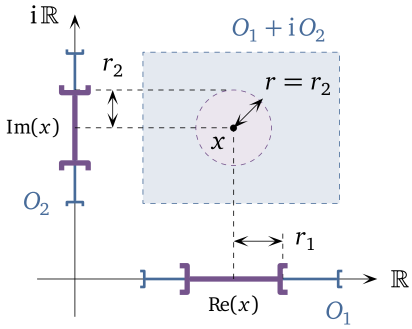
(ii) Le complémentaire d'une boule fermée est ouvert. En particulier, $\mathbb{K} \setminus \{a\}$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{K}$.

(iii) Dans $\mathbb{R}$, un intervalle non vide est ouvert au sens topologique si et seulement s'il est ouvert au sens usuel, i.e. de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \leqslant b$.

(iv) Pour tous ouverts O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$, $O_1 + \mathrm{i}O_2$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.







Démonstration

(i) Soient $a \in \mathbb{K}$ et $\rho > 0$. Montrons que $\mathrm{B}(a, \rho)$ est ouverte. Soit $x \in \mathrm{B}(a, \rho)$. Posons $r = \dfrac{\rho - |x-a|}{2}$ et montrons que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{B}(a, \rho)$. Or pour tout $z \in \mathrm{B}(x, r)$:
$$|z-a| \leqslant |z-x| + |x-a| < r + |x-a| = \frac{\rho + |x-a|}{2} < \frac{\rho+\rho}{2} = \rho.$$

(ii) Soient $a \in \mathbb{K}$ et $\rho \geqslant 0$. Montrons que $\mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}(a, \rho)$ est ouvert. Soit $x \in \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}(a, \rho)$. Posons $r = \dfrac{|x-a| - \rho}{2}$ et montrons que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}(a, \rho)$. Or pour tout $z \in \mathrm{B}(x, r)$:
$$|z-a| \geqslant |x-a| - |z-x| > |x-a| - r = \frac{\rho + |x-a|}{2} > \frac{\rho+\rho}{2} = \rho.$$

(iii) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a \leqslant b$: $\quad]a, b[\,=\, \overset{\circ}{\overbrace{[a, b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a, b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a, b]}} = \,]a, b[, \quad$ donc $]a, b[$ est ouvert, mais $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$ ne le sont pas. On traite de même les cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$.

(iv) Soient O_1 et O_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $O_1 + \mathrm{i}O_2$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $x \in O_1 + \mathrm{i}O_2$. Comme O_1 et O_2 sont ouverts, $\mathrm{B}\big(\mathrm{Re}(x), r_1\big) \subset O_1$ et $\mathrm{B}\big(\mathrm{Im}(x), r_2\big) \subset O_2$ pour certains $r_1, r_2 > 0$. Posons $r = \min\{r_1, r_2\}$ et montrons que $\mathrm{B}(x, r) \subset O_1 + \mathrm{i}O_2$. Or pour tout $z \in \mathrm{B}(x, r)$: $\quad \big|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(x)\big| \leqslant |z-x| < r \leqslant r_1, \quad$ donc $\mathrm{Re}(z) \in \mathrm{B}\big(\mathrm{Re}(x), r_1\big) \subset O_1$, et de même $\mathrm{Im}(z) \in O_2$, donc $z \in O_1 + \mathrm{i}O_2$. ■

Théorème **(Opérations sur les ouverts)**

(i) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

(ii) Toute intersection **FINIE** d'ouverts est un ouvert.

Une intersection quelconque d'ouverts peut très bien ne pas être ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0, 1[$.

Démonstration

(i) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{K}$. Posons $U = \bigcup_{i\in I} O_i$. Tout élément x de U appartient à O_i pour un certain $i \in I$, donc en tant qu'ouvert, O_i est un voisinage de x, mais U contient O_i, donc U est un voisinage de x. Ainsi, U est un voisinage de chacun de ses points, c'est un ouvert.

(ii) Soient $(O_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{K}$. Soit $x \in O_1 \cap \ldots \cap O_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, O_i est un voisinage de x en tant qu'ouvert, or toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x, donc $O_1 \cap \ldots \cap O_r$ est un voisinage de x. Ainsi, $O_1 \cap \ldots \cap O_r$ est un voisinage de chacun de ses points, c'est un ouvert. ∎

Exemple Le complémentaire d'une partie finie est ouvert par intersection car les complémentaires de singletons le sont.

Théorème (L'intérieur est ouvert) Pour toute partie A de $\mathbb{K}$, $\mathring{A}$ est ouvert, et c'est même le plus grand ouvert inclus dans A.

« Plus grand ouvert inclus dans A » signifie « plus grand élément pour l'inclusion de l'ensemble des ouverts inclus dans A ».

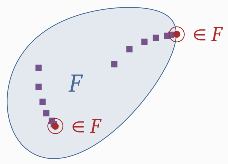
Démonstration Notons O_A la réunion de tous les ouverts inclus dans A. En tant que réunion d'ouverts, O_A est un ouvert inclus dans A, et comme il les contient tous, c'est le plus grand. Il reste à montrer que $\mathring{A} = O_A$.

- Montrons que $\mathring{A} \subset O_A$. Or pour tout $x \in \mathring{A}$, $\mathrm{B}(x, r) \subset A$ pour un certain $r > 0$, donc $\mathrm{B}(x, r)$ est un ouvert inclus dans A, donc $x \in \mathrm{B}(x, r) \subset O_A$ par définition de O_A.
- Inversement, montrons que $O_A \subset \mathring{A}$. Or pour tout ouvert O inclus dans A, $O \subset A$ donc $O = \mathring{O} \subset \mathring{A}$, donc $O_A \subset \mathring{A}$ par réunion. ∎

2.4 Fermés

Définition-théorème (Fermé) Soit F une partie de $\mathbb{K}$.

On dit que F est un *fermé* si toute suite convergente d'éléments de F a pour limite un élément de F.



Il est équivalent de dire que $\overline{F} = F$, i.e. que tout point de F lui est adhérent.

Par ailleurs, F est un fermé si et seulement si son complémentaire $\mathbb{K} \setminus F$ est un ouvert.

Je ne l'ai jamais entendu dire, mais en résumé, un fermé est une partie *stable par passage à la limite*. Attention tout de même, la définition ne dit pas que toute suite d'éléments d'un fermé converge.

Dans la plupart des cours, on définit les fermés comme les complémentaires d'ouverts et la définition séquentielle que j'ai privilégiée est appelée la *caractérisation séquentielle des fermés*.

Démonstration

- Supposons $\mathbb{K} \setminus F$ ouvert et montrons que F est fermé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Pour tout $r > 0$, $|u_n - \ell| < r$ à partir d'un certain rang N, donc $u_N \in \mathrm{B}(\ell, r)$ avec $u_N \in F$. Retenons-en que $\mathrm{B}(\ell, r) \not\subset \mathbb{K} \setminus F$ pour tout $r > 0$. Cela dit, $\mathbb{K} \setminus F$ est ouvert, donc $\ell \in F$.
- Supposons F fermé et montrons que $\mathbb{K} \setminus F$ est ouvert. Soit $x \in \mathbb{K}$. Nous voulons montrer que si $x \in \mathbb{K} \setminus F$, alors x est intérieur à $\mathbb{K} \setminus F$. Par contraposition, faisons l'hypothèse que x n'est pas intérieur à $\mathbb{K} \setminus F$, i.e. que $\mathrm{B}(x, r) \not\subset \mathbb{K} \setminus F$ pour tout $r > 0$. En particulier, $F \cap \mathrm{B}\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ contient un élément u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ par encadrement. Comme F est fermé, il en découle que x appartient à F. ∎

Exemple $\varnothing$ et $\mathbb{K}$ sont des fermés car $\mathbb{K} \setminus \varnothing = \mathbb{K}$ et $\mathbb{K} \setminus \mathbb{K} = \varnothing$ sont des ouverts.

Exemple $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{C}$ car la limite d'une suite complexe convergente est un réel.

Théorème (Exemples de fermés)

(i) Toute boule fermée est fermée. En particulier, tout singleton est fermé.

(ii) Le complémentaire d'une boule ouverte est fermé.

(iii) Dans $\mathbb{R}$, un intervalle non vide est fermé au sens topologique si et seulement s'il est de la forme $[a,b]$, $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a\leqslant b$.

(iv) Pour tous fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{R}$, $F_1+\mathrm{i}\,F_2$ est un fermé de $\mathbb{C}$. En particulier, tout fermé de $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Démonstration Pour l'assertion (i), nous avons déjà montré que le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert. Pour l'assertion (ii), nous avons déjà montré que toute boule ouverte est ouverte.

(iii) Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$ pour lesquels $a\leqslant b$: $\overline{]a,b[}=\overline{[a,b[}=\overline{]a,b]}=\overline{[a,b]}=[a,b]$, donc $[a,b]$ est fermé, mais $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$ ne le sont pas. Ensuite : $\overline{]a,+\infty[}=\overline{[a,+\infty[}=[a,+\infty[$, donc $[a,+\infty[$ est fermé mais $]a,+\infty[$ ne l'est pas. Même chose avec $]-\infty,b[$ et $]-\infty,b]$.

(iv) Soient F_1 et F_2 deux fermés de $\mathbb{R}$. Montrons que $F_1+\mathrm{i}\,F_2$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(F_1+\mathrm{i}\,F_2\right)^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Ainsi, $\mathrm{Re}(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{Re}(\ell)$ avec F_1 fermé, donc $\mathrm{Re}(\ell)\in F_1$. Pour la même raison, $\mathrm{Im}(\ell)\in F_2$ donc $\ell\in F_1+\mathrm{i}\,F_2$.

Exemple Toute partie finie est fermée car les singletons le sont.

Théorème (Opérations sur les fermés)

(i) Toute intersection de fermés est un fermé.

(ii) Toute réunion FINIE de fermés est un fermé.

Une réunion quelconque de fermés peut très bien ne pas être fermée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1\right]=\,]0,1]$.

Démonstration Pour l'assertion (ii), soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille de fermés de $\mathbb{K}$. Pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $\mathbb{K}\setminus F_i$ est ouvert, donc $\left(\mathbb{K}\setminus F_1\right)\cap\ldots\cap\left(\mathbb{K}\setminus F_r\right)$ aussi, donc son complémentaire $F_1\cup\ldots\cup F_r$ est fermé. On montre de même l'assertion (i).

Théorème (L'adhérence et la frontière sont fermées) Pour toute partie A de $\mathbb{K}$, $\overline{A}$ et ∂A sont fermées, et $\overline{A}$ est même le plus petit fermé contenant A.

« Plus petit fermé contenant A » signifie « plus petit élément pour l'inclusion de l'ensemble des fermés contenant A ».

Démonstration Notons F_A l'intersection de tous les fermés contenant A. En tant qu'intersection de fermés, F_A est un fermé contenant A, et comme il est inclus dans tous, c'est le plus petit. Il reste à montrer que $\overline{A}=F_A$.

- Montrons que $\overline{A}\subset F_A$. Or pour tout $x\in\overline{A}$, x est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, donc d'éléments de F, donc $x\in F_A$ car F_A est fermé.
- Inversement, montrons que $F_A\subset\overline{A}$. Or pour tout fermé F contenant A, $A\subset F$ donc $\overline{A}\subset\overline{F}=F$, donc $\overline{A}\subset F_A$ par intersection.
- Pour finir, $\overline{A}$ est fermée et $\mathring{A}$ est ouvert, donc $\partial A=\overline{A}\cap\left(\mathbb{K}\setminus\mathring{A}\right)$ est fermée par intersection.

2.5 Compacts

Définition-théorème (Compact) Soit C une partie de $\mathbb{K}$. On dit que C est un *compact* si toute suite d'éléments de C possède une valeur d'adhérence dans C, i.e. si toute suite d'éléments de C possède une sous-suite convergente de limite un élément de C.

Exemple Toute partie finie de $\mathbb{K}$ est compacte.

Démonstration Soit A une partie finie de $\mathbb{K}$. Toute suite à valeurs dans A prend au moins une valeur un nombre infini de fois d'après le principe des tiroirs, donc possède une valeur d'adhérence dans A.

Exemple Soient a et b deux réels pour lesquels $a \leqslant b$. Le segment $[a, b]$ est compact.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a, b]$. Bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente $\big(u_{\varphi(n)}\big)$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, dont la limite appartient à $[a, b]$ par simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Théorème (Convergence dans un compact) Soient C un compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède au plus une valeur d'adhérence.

Démonstration L'implication directe est bien connue et sans rapport avec la compacité. Réciproquement, nous savons déjà qu'une suite bornée qui possède au plus une valeur d'adhérence converge.

Le théorème qui suit offre une caractérisation très simple de la compacité, si simple que la définition précédente paraît mal choisie après coup. Pourquoi les compacts ne sont-ils pas définis comme les fermés bornés ? En fait, dans un espace vectoriel normé, il est toujours vrai que les compacts sont fermés bornés, mais la réciproque n'est vraie qu'en dimension finie. Dans ce chapitre, la subtilité n'est pas perceptible car $\mathbb{K}$ est justement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème (Compact = fermé borné) Soit C une partie de $\mathbb{K}$. Alors C est compacte si et seulement si C est fermée bornée.

Démonstration

- Supposons C compacte et montrons que C est fermée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Ainsi, ℓ est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans C par compacité, donc $\ell \in C$.

  Montrons que C est bornée en supposant par l'absurde qu'elle ne l'est pas. Cette hypothèse nous permet de nous donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément c_n de C pour lequel $|c_n| \geqslant n$. Toute suite extraite $\big(c_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors non bornée, donc non convergente, car $\big|c_{\varphi(n)}\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence, mais cela contredit la compacité de C.
- Supposons C fermée bornée et montrons que C est compacte. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$. Bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite ℓ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass et $\ell \in C$ car C est fermée. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans C.

Théorème (Exemples de compacts)

(i) Toute boule fermée est compacte.

(ii) Dans $\mathbb{R}$, les intervalles non vides compacts sont les segments $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

(iii) Pour tous compacts K_1 et K_2 de $\mathbb{R}$, $K_1 + \mathrm{i}K_2$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Démonstration Seule l'assertion (iii) mérite une preuve détaillée et nous en donnerons deux.

- **Preuve n°1 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(K_1 + \mathrm{i}K_2\big)^{\mathbb{N}}$. La suite $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans K_1 qui est compact, donc possède une suite extraite convergente $\Big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell_1 \in K_1$. En retour, la suite $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans K_2 qui est compact, donc possède une suite extraite convergente $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell_2 \in K_2$. Après deux extractions successives, la suite $\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 + \mathrm{i}\ell_2 \in K_1 + \mathrm{i}K_2$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $K_1 + \mathrm{i}K_2$.
- **Preuve n°2 :** Il nous suffit de montrer que $K_1 + \mathrm{i}K_2$ est fermé borné. Or $K_1 + \mathrm{i}K_2$ est fermé car K_1 et K_2 le sont. Ensuite, K_1 et K_2 sont bornés par un certain M en module, donc pour tout $x \in K_1 + \mathrm{i}K_2$: $|x| = \big|\mathrm{Re}(x)\big| + \big|\mathrm{Im}(x)\big| \leqslant 2M$, donc $K_1 + \mathrm{i}K_2$ est borné.

Théorème (Opérations sur les compacts)

(i) Toute intersection de compacts est un compact.

(ii) Toute réunion FINIE de compacts est un compact.

Démonstration

(i) Toute intersection de fermés (res. parties bornées) est un fermé (resp. une partie bornée).

(ii) Toute réunion FINIE de fermés (resp. de parties bornées= est un fermé (resp. une partie bornée).

3 Preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Commençons par un lemme technique intéressant en soi.

Théorème (On peut toujours tomber plus bas) Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $a \in \mathbb{C}$. Si $Q(a) \neq 0$, alors $\big|Q(z)\big| < \big|Q(a)\big|$ pour un certain $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration Quitte à remplacer Q par $\dfrac{Q(X+a)}{Q(a)}$, on peut supposer sans perte de généralité que $a=0$ et $Q(0)=1$. Notons alors d le degré de Q — Q est non constant, donc $d \geqslant 1$ — et écrivons Q sous la forme $Q = 1 + b_q X^q + b_{q+1} X^{q+1} + \ldots + b_d X^d$ où b_q est le premier coefficient non nul de Q après son coefficient constant. Notons enfin β_q une racine $q^{\text{ème}}$ de $-\dfrac{1}{b_q}$. Quitte à remplacer Q par $Q(\beta_q X)$, on peut supposer de nouveau sans perte de généralité que $b_q = -1$, de sorte que $Q = 1 - X^q + b_{q+1}X^{q+1} + \ldots + b_d X^d$. Finalement, pour tout $r \in [0,1]$:

$$\big|Q(r)\big| = \big|1 - r^q + \ldots + b_d r^d\big| \leqslant \big|1 - r^q\big| + \sum_{k=q+1}^{d} |b_k|\, r^k \overset{r \in [0,1]}{\leqslant} 1 - r^q + r^{q+1} \sum_{k=q+1}^{d} |b_k| = 1 - (1 - Mr)\, r^q$$

si on pose $M = \displaystyle\sum_{k=q+1}^{d} |b_k|$. Comme voulu, $\big|Q(r)\big| < 1$ si on choisit r assez petit.

Et maintenant, prouvons le théorème de d'Alembert-Gauss.

Démonstration (du théorème de d'Alembert-Gauss) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Pour montrer que P possède une racine dans $\mathbb{C}$, nous allons montrer que la fonction $|P|$ possède un minimum et que celui-ci vaut 0, ce qui garantira bien l'existence d'une racine. Il nous suffit d'ailleurs de justifier l'existence du minimum, car une fois qu'il existe, le minimum ne peut qu'être nul d'après le lemme, sans quoi on pourrait tomber plus bas.

- Introduisons les coefficients de P : $P = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $d = \deg(P) \geqslant 1$, $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $a_d \in \mathbb{C}^*$. Positive, la fonction $|P|$ possède une borne inférieure $m = \inf\limits_{\mathbb{C}} |P|$ d'après la propriété de la borne inférieure, mais s'agit-il d'un minimum ? En tout cas, $m = \lim\limits_{n \to +\infty} \big|P(z_n)\big|$ pour une certaine suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.
- Si jamais $(z_n)_{n\in_N}$ converge vers un nombre complexe ℓ, alors c'est fini : $m = \lim\limits_{n\to+\infty} \big|P(z_n)\big| = \big|P(\ell)\big|$, donc m est un minimum et pas seulement une borne inférieure. Le problème, c'est que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison de converger. Cela dit, on n'a pas vraiment besoin que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, une suite extraite convergente $\big(z_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ fera aussi bien l'affaire. Et c'est là que Bolzano-Weierstrass fait son entrée.
- Il nous reste juste à montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ de module n :
$$\big|P(z)\big| \geqslant \big|a_d z^d\big| - \left|\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k\right| \geqslant |a_d|\, n^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\, n^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$
donc $|a_d|\, n^d - \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\, n^k > m+1$ à partir d'un certain rang N. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$|z| > N \quad \Longrightarrow \quad \big|P(z)\big| > m+1.$$
Pour finir, n'oublions pas que $\big|P(z_n)\big| \xrightarrow[n \to +\infty]{} m$. Ainsi, $\big|P(z_n)\big| \leqslant m+1$ à partir d'un certain rang, donc $|z_n| \leqslant N$ comme on vient de le voir. Comme voulu, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.