APPLICATIONS LINÉAIRES DÉFINIES EXPLICITEMENT

1 ◷ Pourquoi les applications suivantes ne sont-elles pas linéaires ? **1)** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2. \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1. \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy. \end{array}\right.$

---

2 Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1) ◷ **a)** $(x,y) \longmapsto (2x-y, 3x+2y, x+y)$.
b) $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$.
c) $(x,y,z) \longmapsto (2x-y+z, 3x+y-z, x-3y+3z, 2x+4y-4z)$.

2) ◷◷
a) $P \longmapsto X\big(P'(X+1)-P'(1)\big)$ sur $\mathbb{R}_3[X]$.
b) $P \longmapsto P - XP' - P(0)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
c) $M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

---

3 **1)** ◷ Montrer que l'application :
$$(x,y,z) \longmapsto (x+2y, 1x-y+z, 2x+2y+z)$$
est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

2) ◷◷ Montrer que $P \longmapsto \big(P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

3) ◷◷ Proposer un exemple d'isomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\big)$.

---

4 ◷ Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Déterminer sans calcul, par simple contemplation de A, une base de $\operatorname{Im} A$ et une équation de $\operatorname{Ker} A$.

---

5 ◷◷ Calculer la dimension des espaces vectoriels suivants au moyen d'un isomorphisme bien choisi :

1) $\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\top \end{pmatrix} \ \middle|\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right\}$.

2) $\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ A^\top + B & \lambda I_n \end{pmatrix} \ \middle|\ A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

---

6 ◷◷ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des *polynômes en A* : $\mathbb{K}[A] = \big\{P(A) \ |\ P \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

1) Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Montrer que A^{-1} est un polynôme en A en étudiant l'application $M \longmapsto AM$ définie sur $\mathbb{K}[A]$.

---

7 ◷◷ Montrer que $P \longmapsto P(X) + P(X+1)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis qu'elle en est un de $\mathbb{R}[X]$.

---

8 ◷◷ On note Δ l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.

2) Déterminer $\operatorname{Im} \Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

---

9 ◷◷ Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

1) Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire $(f,g) \longmapsto f+g$ de $F \times G$ dans E.

2) Redémontrer ainsi la formule de Grassmann.

---

10 ◷◷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $B_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, X^i est combinaison linéaire de $B_0, \ldots, B_n$. Qu'en déduit-on ?

2) En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

APPLICATIONS LINÉAIRES ABSTRAITES

11 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\operatorname{Ker} f^p$ et $\operatorname{Ker} f^q$, puis $\operatorname{Im} f^p$ et $\operatorname{Im} f^q$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$ pour lesquels $p \leqslant q$.

---

12 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f,g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'alors $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

---

13 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f,g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :
$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g \iff \operatorname{Im}(gf) = \operatorname{Im} g.$$

---

14 ◷ Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1) **a)** Exprimer la proposition $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ en termes de noyau et d'image.
b) Quelle relation en déduit-on entre $\operatorname{rg}(f)$ et $\operatorname{rg}(g)$ si E, F et G sont de dimension finie ?

2) Montrer que $f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

---

15 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f \neq E$.

---

16 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que :
$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f.$$
2) Montrer que :
$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f.$$
3) On suppose à présent E de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
$$\text{(i)} \quad E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f.$$
$$\text{(ii)} \quad \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f. \qquad \text{(iii)} \quad \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f.$$

---

17 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :
$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u \iff u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } \dim E = 2\operatorname{rg}(u).$$

---

18 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'inégalité :
$$\left|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\right| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

---

19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) On suppose f nilpotent et on note p son indice de nilpotence.
- **a)** Écrire avec des quantificateurs les propositions $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- **b)** Montrer que pour un certain $x \in E$, la famille $\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.
- **c)** En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) On suppose dans cette question que $p = n$. D'après **1)b)**, E possède donc une base de la forme :
$$\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$$
pour un certain $x \in E$. On note $\mathscr{C}(f)$ le *commutant de f*, i.e. l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à f.
- **a)** Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
- **b)** Montrer que l'application $g \longmapsto g(x)$ définie sur $\mathscr{C}(f)$ est linéaire injective.
- **c)** Montrer que $\left(\operatorname{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{C}(f)$, puis en déduire la dimension de $\mathscr{C}(f)$.

3)
- **a)** Montrer que f est nilpotent si :
$$\forall x \in E, \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p(x) = 0_E.$$
- **b)** Trouver un contre-exemple au résultat **a)** dans le cas où E est de dimension infinie.

---

20 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que si $f^2 = 3f - 2\operatorname{Id}_E$, alors :
$$E = \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_E\right).$$
2) Montrer que si $f^3 = \operatorname{Id}_E$, alors :
$$E = \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^2 + f + \operatorname{Id}_E\right).$$

---

21 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $fg = h$, $gh = f$ et $hf = g$.

1) Montrer que f, g et h ont même noyau K et même image I.
2) Montrer que $f^5 = f$.
3) En déduire que $E = I \oplus K$.

---

22 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

---

23 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1) Montrer que si E et F sont de dimension finie : $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
2) Montrer que si on suppose seulement $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ de dimension finie, alors $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ l'est aussi avec la même inégalité.

---

24 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que :
$$\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leqslant \dim\left(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v\right) + \dim\left(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v\right).$$

---

25 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $fg - gf = \operatorname{Id}_E$.

1) Montrer que $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) Montrer que la famille $\left(g^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

---

26 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $h \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad h(x) = \lambda x$. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$, i.e. que h est une homothétie.

---

27 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est commutatif si $n \leqslant 1$ et non commutatif si $n \geqslant 2$.

---

28 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F. À quelle condition nécessaire et suffisante simple K et I sont-ils respectivement le noyau et l'image d'une même application linéaire de E dans F ?

---

29 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r. Montrer que f est la somme de r applications linéaires de rang 1.

---

30 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \operatorname{Ker} u$ et une forme linéaire λ de E pour lesquels $u(x) = \lambda(x)a$ pour tout $x \in E$.

CALCUL MATRICIEL

31 Déterminer la dimension de : $\mathrm{Vect}\big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(1,0,1,1)\big)$.

---

32 Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Calculer le rang des matrices suivantes :

1) **a)** $\begin{pmatrix}2&1&3&-3\\-1&2&1&4\\1&1&2&-1\end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&5&-2&-5\\6&5&4&3\\9&5&0&1\\7&0&5&-3\end{pmatrix}$.

2) **a)** $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.

---

33 On pose $A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&2&2&0\\0&-1&1&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,A$ et $\mathrm{Im}\,A$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

34

1)

a) Montrer que pour tout $X\in\mathbb{R}^n=\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$X^\top X=0\quad\Longrightarrow\quad X=0.$$

b) En déduire que $\mathrm{Ker}\big(M^\top M\big)=\mathrm{Ker}\,M$, puis que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\big(M^\top M\big)$ pour tout $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

2) Soient $A_1,\ldots,A_r$ des parties de $[\![1,n]\!]$. On suppose que pour tous $i,j\in[\![1,r]\!]$:
$$\big|A_i\cap A_j\big|=\begin{cases}a & \text{si } i=j\\ b & \text{si } i\neq j\end{cases}\qquad\text{avec } b<a.$$
On note M la matrice définie par $m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } j\in A_i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ pour tous $i\in[\![1,r]\!]$ et $j\in[\![1,n]\!]$.
Calculer $\mathrm{rg}\big(MM^\top\big)$ et en déduire que $r\leqslant n$.

---

35 Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $D\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose A inversible.

1) Compléter le calcul par blocs suivant :
$$\begin{pmatrix}A&C\\B&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n&0_{n,p}\\\cdots&I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots&0_{n,q}\\0_{p,n}&D-BA^{-1}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&\cdots\\0_{q,n}&I_q\end{pmatrix}.$$

2) En déduire une égalité intéressante de rangs.

---

36 On travaille dans cet exercice avec le corps de base $\mathbb{C}$. On définit le *conjugué* $\overline{M}$ (resp. $\overline{X}$) d'une matrice M (resp. d'un vecteur X) en conjuguant terme à terme ses composantes.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\overline{F}=\big\{\overline{X}\ \big|\ X\in F\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de même dimension que F.

2) Montrer que les matrices M et $\overline{M}$ ont même rang pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vue comme élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. On suppose que $A^3=-A$. On suppose par l'absurde A inversible.

a) Montrer que $\mathbb{C}^3=\mathrm{Ker}\,(A-\mathrm{i}I_3)\oplus\mathrm{Ker}\,(A+\mathrm{i}I_3)$.

b) Conclure.

---

37 Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.

2) Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $AB-\lambda I_n$ est inversible si et seulement si $BA-\lambda I_n$ l'est.

FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

38 Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. Montrer que $\big\{P\in\mathbb{C}[X]\ \big|\ P(\alpha)=0\big\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

---

39 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H_1\cap H_2)$.

PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

40 On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})=\mathscr{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ en exhibant une certaine symétrie.

---

41 On note φ l'application :
$$(x,y,z)\longmapsto(x-2y+3z,3x-6y+9z,2x-4y+6z).$$
De quelle matrice φ est-elle l'application linéaire canoniquement associée ? En déduire que φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et caractériser celui-ci géométriquement.

---

42 On pose $A=\begin{pmatrix}2&2&-1&-1\\2&2&-1&-1\\1&1&1&-2\\1&1&-2&1\end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire sans autre calcul que $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}\,A\oplus\mathrm{Im}\,A$.

43

1) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]=\mathbb{R}_1[X]\oplus\mathrm{Vect}\big(X^2+X+1\big)$, puis déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^2+X+1\big)$.

2) On pose $G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \big|\ x+y+2z=0\big\}$ et $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \big|\ x=-y=-z\big\}$.
Montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, puis déterminer une expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

3) On pose $E = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f(0)=0 \right\}$. Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = E \oplus \text{Vect}(\exp)$, puis déterminer une expression de la projection sur E parallèlement à $\text{Vect}(\exp)$.

---

44 Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Montrer que l'application qui associe à tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$ et caractériser celui-ci géométriquement.

---

45 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. On suppose que $pq = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $p+q-qp$ est la projection sur $\text{Im}\,p \oplus \text{Im}\,q$ de direction $\text{Ker}\,p \cap \text{Ker}\,q$.

---

46 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. On suppose que p et q commutent. Montrer que pq est la projection de E sur $\text{Im}\,p \cap \text{Im}\,q$ de direction $\text{Ker}\,p + \text{Ker}\,q$.

---

47 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Montrer que, dans ce cas, $\text{Im}\,p$ et $\text{Im}\,q$ sont en somme directe et que $p+q$ est la projection de E sur $\text{Im}\,p + \text{Im}\,q$ de direction $\text{Ker}\,p \cap \text{Ker}\,q$.

---

48 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs de mêmes noyaux si et seulement si $p = pq$ et $q = qp$.

---

49 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\text{Proj}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E. On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\text{Proj}(E)$ de la façon suivante — pour tous projecteurs $p,q \in \text{Proj}(E)$: $\quad p \preccurlyeq q \quad \Longleftrightarrow \quad pq = qp = p$.

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\text{Proj}(E)$.

2) Montrer que pour tous $p,q \in \text{Proj}(E)$, si p et q commutent, alors $\inf\left\{p,q\right\} = pq$.

---

50 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux symétries de E. Montrer que :

$$\text{Ker}\,(uv - vu) = \text{Ker}\,(u+v) \oplus \text{Ker}\,(u-v).$$

---

51 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On veut montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $\quad \text{Ker}\,f = \text{Im}\,f$.

(ii) $\quad f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad$ et $\quad \exists\, g \in \mathscr{L}(E),\ fg + gf = \text{Id}_E$.

1) On suppose (ii) vraie. Montrer que fg est un projecteur et que $\text{Ker}\,f = \text{Im}\,f = \text{Im}\,(fg)$.

2) Montrer l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).
