ENTIERS ET (IR)RATIONNELS

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier de tête les expressions :

1) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$. **2)** $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.

3) $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$. **4)** $16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}$.

2

1) Que dire de la somme et du produit de deux rationnels (resp. de deux irrationnels, resp. d'un rationnel et d'un irrationnel) ?

2) Soit $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit $a + b\varphi$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont uniques.

3) Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout $n \geqslant 2$ qui n'est pas un carré d'entier.

4) Montrer que $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel pour tous entiers $a, b \geqslant 2$ premiers entre eux.

5) On pose $x^y = e^{y \ln x}$ pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:
$$x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = \left(x^y\right)^{y'} \quad \text{et} \quad (xx')^y = x^y x'^y.$$

b) Montrer l'existence de deux irrationnels x et y pour lesquels x^y est rationnel. On pourra exploiter le résultat de la question **4)** ou bien s'intéresser au réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

3 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$ en fonction de x, y et $|x - y|$. On commencera par calculer leur somme et leur différence.

---

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $|4 - x| = x$. **2)** $\left|x^2 + x - 3\right| = |x|$.

3) $|x + 2| + |3x - 1| = 4$. **4)** $\sqrt{1 - 2x} = |x + 7|$.

5) $x\,|x| = 3x + 2$. **6)** $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.

---

5 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$. **2)** $x + 2 < |2x - 5|$.

3) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$. **4)** $|3x - 5| \leqslant |2x + 3|$.

5) $|x - 1| \leqslant |2x + 1| + 1$. **6)** $x + 3 \leqslant \sqrt{x + 5}$.

7) $\dfrac{x+5}{x^2 - 1} \geqslant 1$. **8)** $|x + 3| > \left|x^2 - 3\right|$.

9) $\sqrt{|x + 2|} \leqslant |x - 10|$. **10)** $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$.

---

6 Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

1) $\sqrt{x^2 - 4|x| + 3}$. **2)** $\dfrac{\ln(2 - x)}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2}}$.

---

7 Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} = a$ d'inconnue $x \geqslant 0$.

INÉGALITÉS ET SUBSTITUTIONS

8 Soient $x, y \geqslant 0$.

1) Montrer que $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2) En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}$.

3) En déduire que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

9

1) Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x + y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

2) En déduire que pour tous $x, y > 0$:
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

10

1) Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.

2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}.$$
À quelle condition a-t-on égalité ?

---

11 Soient $a, b, c > 0$ trois réels de somme s.

1) Montrer que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 6 - s \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{s}.$$

2) De ces deux inégalités, l'une est-elle meilleure que l'autre, et si oui laquelle ?

12

1) Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\,\sqrt{x + y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

2) En déduire que pour tous $x, yz \geqslant 0$:
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x + y}{2}} + \sqrt{\frac{y + z}{2}} + \sqrt{\frac{z + x}{2}}.$$

3) En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :
$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

PARTIE ENTIÈRE

13

1) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: **a)** $\lfloor 2x \rfloor = 5 + \lfloor -x \rfloor$.

b) $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. **c)** $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

2) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

a) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. **b)** $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leqslant \lfloor 6x \rfloor$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor.$$

SOMMES

14 Avec des notations évidentes, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?
$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \qquad \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k,$$
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k, \qquad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \sum_{k=1}^n |a_k|,$$
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p = \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

15 Simplifier les sommes suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^n i(i-1)$. **2)** $\displaystyle\sum_{j=1}^n (2j-1)$. **3)** $\displaystyle\sum_{k=1}^n (-1)^k$.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^n (k+n)$. **5)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$. **6)** $\displaystyle\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

7) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ en écrivant les termes sommés sous la forme $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$ avec $a, b > 0$.

8) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$. **9)** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j$. **10)** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

11) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$. **12)** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$. **13)** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$.

14) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}$. **15)** $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} ij$. **16)** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max\{i,j\}$.

16 On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$, puis que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

17

1) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
a) $u_{n+1} = u_n + n$. **b)** $u_{n+1} = u_n + n^2 - 1$.

2) Déterminer une expression explicite de la famille $(z_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définie pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ par $z_{0,j} = 1$ et $z_{i+1,j} = 2^i j + z_{i,j}$.

18 Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

19

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^n 2^k k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en suivant pas à pas les indications suivantes :
— compléter d'abord l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^n x^k = \ldots$
— dériver des deux côtés,
— évaluer en 2 et conclure.

2) Retrouver le résultat de la question **1)** en calculant de deux façons $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 2^j$.

3) Soit $x \in]-1,1[$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

b) Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2}$.

20 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

21 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

22

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n (n+1)}.$$

2) Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $p > 0$:
$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+p} \right)^2 \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

23 On veut montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$:
$$\sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$$

1) Déduire cette inégalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) La redémontrer par récurrence.

24 Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :
$$\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$
Montrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$:
$$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\| \qquad \textit{(inégalité triangulaire)}.$$

25 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}_n$ l'ensemble $\mathbb{P}\cap[\![1,n]\!]$ et E_n l'ensemble des entiers sans facteur carré de $[\![1,n]\!]$, i.e. divisibles par aucun carré de nombre premier.

1) Montrer que $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$, puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\geqslant\ln n$.
2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\sum_{i\in E_n}\frac{1}{i}\sum_{1\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{n}{i}}}\frac{1}{r^2}$.
3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\leqslant 2\sum_{i\in E_n}\frac{1}{i}\leqslant 2\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\p\leqslant n}}\left(1+\frac{1}{p}\right)$.
4) En déduire que $\displaystyle\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\p\leqslant n}}\frac{1}{p}\geqslant\ln\ln n-\ln 2$.

PRODUITS

26 Avec des notations évidentes, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

$$\prod_{k=1}^n(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^n a_k+\prod_{k=1}^n b_k,\qquad \prod_{k=1}^n\lambda a_k=\lambda\prod_{k=1}^n a_k,$$

$$\prod_{k=1}^n a_kb_k=\prod_{k=1}^n a_k\prod_{k=1}^n b_k,\qquad \left|\prod_{k=1}^n a_k\right|=\prod_{k=1}^n|a_k|,$$

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^p=\prod_{k=1}^n a_k^p,\qquad \prod_{i=1}^m\sum_{j=1}^n x_{ij}=\sum_{j=1}^n\prod_{i=1}^m x_{ij}.$$

27 Simplifier les produits suivants, où $x\in\mathbb{R}$, en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^n\sqrt{k(k+1)}$. 2) $\displaystyle\prod_{k=1}^n(-5)^{k^2-k}$. 3) $\displaystyle\prod_{k=1}^n\frac{4^k}{k^2}$.

4) $\displaystyle\prod_{k=0}^n(2k+1)$. 5) $\displaystyle\prod_{k=1}^n(4k^2-1)$. 6) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$.

7) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i)$. 8) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j$. 9) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij$.

10) $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^p x^{p!k}$. 11) $\displaystyle\prod_{k=0}^n\left(1+x^{2^k}\right)$.

28 Montrer sans récurrence que $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

29
1)
a) Montrer que $\displaystyle 1+\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ pour tout $k\geqslant 2$.
b) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\leqslant 4$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n}.$$

30 Montrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!}=\prod_{k=1}^n k^k.$$

31 Factoriser k^3-1 par $k-1$ et k^3+1 par $k+1$ pour tout $k\geqslant 2$, puis en déduire que $\displaystyle\prod_{k=2}^{+\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}$.

32
1) Montrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}\geqslant(n+1)^n.$$

2) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)!\geqslant n!^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

33 Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^n(1-x_k)\geqslant 1-\sum_{k=1}^n x_k$ pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\ldots,x_n\in[0,1]$.

34
1) a) Montrer que $\displaystyle\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$ pour tous $x,y\geqslant 0$.
b) En déduire que pour tous $x_1,\ldots,x_{2^n}>0$:

$$\sqrt[2^n]{\prod_{k=1}^{2^n}x_k}\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}x_k.$$

2) a) Montrer que $2^n\geqslant n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
b) Soient $x_1,\ldots,x_n>0$. On pose $\displaystyle m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$.
En appliquant le résultat de la question **1)b)** à la famille de 2^n réels $(x_1,\ldots,x_n,m,\ldots,m)$, montrer l'*inégalité arithmético-géométrique* :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k.$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

35 On veut redémontrer par le calcul les formules du cours relatives aux coefficients binomiaux. On rappelle que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ si $k\in[\![0,n]\!]$ et $\displaystyle\binom{n}{k}=0$ sinon.

1) Redémontrer la formule de symétrie.
2) Redémontrer la formule du capitaine.
3) Redémontrer la formule de Pascal.
4) Montrer que les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.

36 Montrer que $\displaystyle\binom{2n}{n}$ est pair pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

37 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier la monotonie de la famille des $\binom{n}{k}$, k décrivant $[\![0, n]\!]$.

2) En déduire que $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

38 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$, qu'on note aussi respectivement $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.

39

1) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$:

a) grâce à la formule du capitaine.

b) en dérivant de deux façons différentes la fonction $x \longmapsto (x+1)^n$.

2) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sommes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$. **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

40 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$.

41 Montrer que pour tous $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

42 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.