DÉNOMBREMENTS DIVERS

1 On tire simultanément 7 cartes d'un jeu de tarot. On ne cherchera pas à évaluer numériquement les résultats obtenus, ce n'est pas l'objet de l'exercice. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1) 2 cœurs, 2 trèfles et 3 atouts ?
2) exactement 3 atouts et exactement 2 piques ?
3) 7 carreaux, ou bien au moins 5 piques et l'excuse ?
4) au plus un cœur et au moins 5 atouts ?

---

2 Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes ?
1) RIQUIQUI. 2) ABRACADABRA.

---

3 On s'intéresse à des tableaux de n lignes et p colonnes dont chaque case contient 0 ou 1. Combien en existe-t-il :

1) qui contiennent n coefficients 1 en tout ?
2) dont chaque ligne contient exactement un coefficient 1 ?
3) dont chaque ligne contient exactement deux coefficients 1 ?
4) (ici $n = p$) dont chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un coefficient 1 ?

4

1) De combien de manières peut-on asseoir n filles et n garçons sur un banc rectiligne avec une alternance parfaite fille-garçon ?
2) Même question autour d'une table ronde.

---

5 Combien y a-t-il de couples (x, y) :

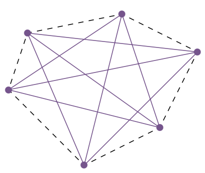
1) dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $x + y = n$?
2) dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $x < y$?
3) dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ pour lesquels $x < y$?
4) dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $|x - y| \leqslant 1$?

---

6 Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot : 1) MERCI ? 2) QUOI ? 3) OSLO ?

---

7 On appelle *diagonale* d'un polygone convexe tout segment joignant deux sommets non consécutifs. Si un polygone possède autant de diagonales que de côtés, combien possède-t-il de côtés ?



---

8 Étant donnée sa factorisation première, combien un entier naturel non nul possède-t-il de diviseurs positifs ?

---

9 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $m, n \geqslant p$. À l'issue d'un concours, m filles et n garçons sont admis. Combien de classements des $2p$ premiers admis contenant autant de filles que de garçons peut-on former ?

---

10 Soit f une *involution de* $[\![1, 2n+1]\!]$, i.e. une application de $[\![1, 2n+1]\!]$ dans lui-même pour laquelle $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f possède un point fixe.

---

11 Combien existe-t-il de surjections de E sur F :

1) si $|E| = n$ et $|F| = 2$?
2) si $|E| = n+1$ et $|F| = n$?

---

12 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent :

1) un et un seul élément de $[\![1, p]\!]$?
2) au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

---

13 Combien existe-t-il de fonctions de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$:

1) strictement croissantes ?
2) croissantes ?

---

14 Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

1) Combien existe-t-il de relations binaires sur E ?
2) Combien de relations binaires réflexives ?
3) Combien de relations binaires réflexives symétriques ?

---

15 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E pour lesquels : 1) $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$? 2) $A \cap B = \varnothing$? 3) $A \cup B = E$?

---

16 Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de familles $(A_1, \ldots, A_p)$ de parties de E pour lesquelles $A_1 \subset \ldots \subset A_p$?

---

17 On se promène sur $\mathbb{Z}^2$ par petits sauts de longueur 1.

1) Un point de départ étant fixé, combien de chemins de longueur n peut-on emprunter ?
2) On appelle *circuit* tout chemin dont le point de départ coïncide avec le point d'arrivée. Montrer qu'il existe $\binom{2n}{n}^2$ circuits de longueur $2n$ de point de départ fixé.

---

18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$ en appliquant la formule du crible aux ensembles $\left([\![1, n]\!] \setminus \{k\}\right)^n$, k décrivant $[\![1, n]\!]$.

2) Simplifier de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$ pour tout $p \in [\![0,n]\!]$.

---

19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *dérangement de* $[\![1,n]\!]$ toute permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!]$ et on note d_n leur nombre. Montrer que $\displaystyle d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ en appliquant la formule du crible aux ensembles :

$$\Big\{\sigma \in S_n \mid \quad \sigma(i) = i\Big\},\ i \text{ décrivant } [\![1,n]\!].$$

DOUBLE COMPTAGE ET RELATIONS DE RÉCURRENCE

20 Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

21 Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $(p+1)$-combinaison de $[\![1,n+p+1]\!]$?

2) Calculer de deux manières le nombre de $(p+1)$-combinaisons de $[\![1,n+p+1]\!]$. Conclusion ?

22

1) Soient E un ensemble fini de cardinal n ainsi que $p, k \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières le nombre de couples (A,B) de parties de E pour lesquels : $A \subset B$, $\quad |A| = k \quad$ et $\quad |B| = p$. $\quad$ Conclusion ?

2) On note S (resp. T) l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui associe à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$y_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k \quad \left(\text{resp. } y_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x_k\right).$$

Montrer que S et T sont deux bijections de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ réciproques l'une de l'autre.

---

23 Soit E un ensemble de cardinal np et $\mathscr{D}$ un ensemble de p-combinaisons de E. On suppose que tout élément de E appartient à exactement n éléments de $\mathscr{D}$. Calculer le cardinal de $\mathscr{D}$.

24

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme n.

a) Calculer s_1, s_2 et s_3.

b) Montrer que $\displaystyle s_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}s_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire une expression explicite de s_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $s_{n,p}$ le nombre de p-listes d'entiers naturels non nuls de somme n.

a) Calculer $s_{1,p}, s_{2,p}, s_{n,1}$ et $s_{n,2}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $s_{n+1,p+1} = s_{n,p} + s_{n,p+1}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$:

$$s_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

3) Retrouver le résultat de la question **2)c)** par une preuve directe, puis celui de la question **1)c)**.

PRINCIPE DES TIROIRS ET AUTRES DIFFICULTÉS

25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donnés $n+1$ entiers compris entre 1 et $2n$, montrer qu'il en existe toujours deux :

1) consécutifs.

2) dont l'un est un multiple de l'autre.

---

26 Étant données 6 personnes deux à deux amies ou ennemies, montrer qu'il en existe toujours trois mutuellement amies ou trois mutuellement ennemies.

27

1) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'existence d'une partie non vide I de $[\![1,n]\!]$ pour laquelle $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est un multiple de n.

2) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une partie non vide I de $[\![1,n]\!]$ et d'un entier N pour lesquels $\displaystyle\left|N - \sum_{i\in I}x_i\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

28

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k, k décrivant $[\![0,n]\!]$, montrer le *théorème d'approximation de Dirichlet* suivant :

$$\exists\,(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\quad q \leqslant n \quad \text{et} \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a) Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ pour lesquels $\displaystyle\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

b) Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels : $\quad \displaystyle\exists\, q \in \mathbb{N}^*,\quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

---

29 Soient $p, q > 1$ deux irrationnels pour lesquels $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On pose :

$$\mathscr{P} = \Big\{\lfloor kp \rfloor \mid \quad k \in \mathbb{N}^*\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{Q} = \Big\{\lfloor kq \rfloor \mid \quad k \in \mathbb{N}^*\Big\}.$$

1) Montrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = \varnothing$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Big|\mathscr{P} \cap [\![1,n]\!]\Big| = \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor,$$

puis que $\Big|(\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}) \cap [\![1,n]\!]\Big| = n$.

3) En déduire que $\mathbb{N}^* = \mathscr{P} \sqcup \mathscr{Q}$ (*théorème de Beatty*).
