LIPSCHITZIANITÉ

1 Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes. Montrer que fg est lipschitzienne sur $[a,b]$.

---

2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne. On note E l'ensemble de ses points fixes.
1) Montrer que E est un intervalle.
2) Montrer que si E est borné et non vide, alors E est un segment.

---

3 Soient $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction pour laquelle $\left|f(x)-f(y)\right| < |x-y|$ pour tous $x,y \in [0,1]$ distincts.
1) Montrer, en exploitant le minimum de la fonction $x \longmapsto \left|f(x)-x\right|$, que f possède un et un seul point fixe α.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ pour laquelle $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 a) Montrer que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell - \alpha|$ pour toute valeur d'adhérence ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
 b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

DÉRIVABILITÉ, POINT DE VUE LOCAL

4 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
1) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^\alpha & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
2) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \geqslant 1 \\ ax^3 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad (a,b \in \mathbb{R})$.
3) $x \longmapsto \dfrac{|x|}{1 + |x^2 - 1|}$.

---

5 Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?

---

6 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a.
Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f\left(a+h^2\right)}{h}$.

---

7 Soit $f \in \mathscr{D}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que :
$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$
Montrer que f s'annule sur $]a,b[$.

---

8 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f \circ f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

CALCULS DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES

9 Calculer les dérivées successives de :
1) a) $x \longmapsto a^x \quad (a > 0)$.
 b) $x \longmapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$. c) cos et sin.
 d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{R})$.
2) a) $x \longmapsto \ln(3-2x)$.
 b) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
3) a) $x \longmapsto x^3\,e^x$. b) $x \longmapsto x^2 \sin x$.

---

10 On note f la fonction $x \longmapsto e^{x\sqrt{3}} \sin x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer pour tous $n \in \mathbb{N}$, grâce à l'exponentielle complexe, deux réels A_n et φ_n pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f^{(n)}(x) = A_n\, e^{x\sqrt{3}} \sin(x + \varphi_n)$.

11
1) On note f la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré à préciser, pour lequel $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré à préciser, pour lequel $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

12 Montrer que l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f^{(n)}$ est positive sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est stable par dérivation, produit et composition.

---

13 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \longmapsto x^{n-1}\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

---

14 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}\,e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,e^{\frac{1}{x}}.$$

---

15 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

16 Montrer que :
1) pour tout $x \geqslant 0$: $\quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant x\,e^x$.
2) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \operatorname{ch} x - 1 \leqslant x \operatorname{sh} x$.

17

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

---

18 On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Montrer que f possède un et un seul point fixe ℓ.
   b) Proposer un encadrement simple de ℓ, puis montrer que ℓ est attractif pour f.
2) **a)** Montrer que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{4^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer à la main un rang n explicite (pas une partie entière) pour lequel u_n est une approximation de ℓ à 10^{-5} près.

19

1) Soient I un intervalle, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne et $\varepsilon > 0$. On suppose que g possède un point fixe α et que $[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon] \subset I$. Montrer que $[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$ est stable par g.
2) On note f la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.
   a) Montrer que f possède un et un seul point fixe ℓ.
   b) Montrer que $\ell \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$, puis que ℓ est attractif pour f.
3) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{4}\, e^{-\frac{n}{4}}$.

---

20 Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Montrer, en étudiant la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$, que la tangente de f en un certain point de $]0,1[$ passe par l'origine.

---

21 Soient $n \geqslant 2$ entier et $p,q \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.
2) Montrer que si n est pair, X^n+pX+q possède même au plus deux racines réelles.

---

22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $\big(X^2-1\big)^n$.

1) Montrer que $P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$.
2) En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

23

1) **a)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2 scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
   b) Même question sans la précision « à racines simples ».
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut pas posséder deux coefficients consécutifs nuls.
3) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Montrer que les racines complexes de $P^2+\lambda$ sont toutes simples.

---

24 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour laquelle $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$, si possible de plusieurs manières.

---

25 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

1) Soient $a,b \in I$ avec $a \leqslant b$ et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Pourquoi la fonction $x \longmapsto f(x) - xy$ n'est-elle pas injective ?
2) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle (*théorème de Darboux*).
3) Que dire de f' si elle ne s'annule pas sur I ?

---

26 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + P'' + \ldots$

1) Montrer que P et Q sont de degré pair si $P \neq 0$.
2) Montrer que Q possède un minimum sur $\mathbb{R}$, puis que $Q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

27 Soient $f \in \mathscr{D}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

---

28 Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1,\ldots,x_n \in]0,1[$ distincts pour lesquels $f'(x_1)+\ldots+f'(x_n) = n$.

---

29 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, l'ensemble $\big\{x \in \mathbb{R} \mid \; P(x) = \sin x\big\}$ est fini.

---

30 Soit $f \in \mathscr{C}^n\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f s'annule en au moins n points distincts $a_1,\ldots a_n$.

1) Soit $x \in [a,b]$ fixé distinct de $a_1,\ldots,a_n$.
   a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(t) - A(t-a_1)\ldots(t-a_n)$ s'annule en x.
   b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in]a,b[$:
$$f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n)\,\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$
   Pourquoi est-ce encore vrai si x est l'un des réels $a_1,\ldots,a_n$?

2) Justifier l'existence de $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$, puis montrer que pour tout $x \in [a,b]$:
$$\left|f(x)\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{n!}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.$$

31
1) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Soit en outre $x \in I$ fixé distinct de a.
a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :
$$t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$
s'annule en a, puis simplifier φ'.
b) En déduire que pour un certain $c \in I$:
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$
Pourquoi est-ce encore vrai si $x=a$?
c) En déduire que si $\left|f^{(n+1)}\right|$ est bornée sur I, alors pour tout $x \in I$ (*inégalité de Taylor-Lagrange*) :
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$,
$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

32
1) Soit $f \in \mathscr{C}^3\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
a) Déterminer le réel A pour lequel la fonction :
$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}\big(f'(a)+f'(x)\big)+\frac{(x-a)^3}{12}A$$
s'annule en b.
b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in]a,b[$:
$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c).$$
2) Soient $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.
a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, il existe un réel $c_k \in]x_k,x_{k+1}[$ pour lequel :
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{2n}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)-\frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(c_k)$$
et interpréter géométriquement.
b) Justifier l'existence de $\|f''\|_\infty$, puis montrer que :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty.$$

---

33 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$. On suppose que la fonction $x \longmapsto x^2f''(x)$ est bornée et que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
1) Montrer que pour tous $x>0$ et $a \in]0,1[$, il existe un réel $\xi \in]ax,x[$ pour lequel :
$$f(ax)=f(x)-(1-a)xf'(x)+\frac{(1-a)^2}{2}x^2f''(\xi).$$
2) En déduire que $xf'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

LIMITE DE LA DÉRIVÉE

34 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle $f'(0)=0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ pour laquelle $f(x)=g\big(x^2\big)$ pour tout $x \geqslant 0$.

35
1) Quelle est la dérivée de $x \longmapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto x^{n+1}\ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ à $\mathbb{R}$ tout entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

36 On note f la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$ et g la fonction $x \longmapsto f\big(1-x^2\big)$.
1)
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel $f^{(n)}(x)=P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x>0$.
b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
c) Tracer l'allure du graphe de g.
2)
a) Proposer un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui possède une limite finie en $+\infty$ mais dont la dérivée n'a pas de limite en $+\infty$.
Plus dur à présent. Peut-on imposer à la fonction cherchée d'être croissante ? Pour montrer que oui, on pose $h(x)=g\big(2^k(x-k)\big)$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]k-\dfrac{1}{2^k},k+\dfrac{1}{2^k}\right[$ et $h(x)=0$ sinon.
b) Tracer l'allure du graphe de h, puis montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne possède pas de limite en $+\infty$.
c) On admet le théorème fondamental du calcul intégral et on se donne une primitive H de h sur $\mathbb{R}$. Montrer que H est croissante, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et possède une limite finie en $+\infty$.

37
1) Soit $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne avec $K \geqslant 0$.
a) Justifier pour tout $x \in]a,b]$ l'existence des réels :
$$M(x)=\sup_{t\in]a,x]}f(t) \quad \text{et} \quad m(x)=\inf_{t\in]a,x]}f(t).$$
b) Étudier la monotonie des fonctions m et M sur $]a,b]$ et montrer que pour tout $x \in]a,b]$:
$$M(x)-m(x) \leqslant K|x-a|.$$
c) En déduire que f est prolongeable par continuité en a.

2) a) Soit $f \in \mathscr{D}\big(]a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que si f' possède une limite finie en a, alors f est prolongeable en une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée est continue en a.
b) Comparer le résultat de la question **a)** au théorème de la limite de la dérivée et montrer qu'il est faux si on y remplace $]a,b]$ par $I\setminus\{a\}$ où I est un intervalle dont a est un point intérieur.
c) Soit $f \in \mathscr{C}^k\big(]a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que si $f^{(k)}$ possède une limite finie en a, alors f est prolongeable une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.

INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ

38 Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ en revenant à la définition de la convexité.

---

39 Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$:
$$|x| \leqslant |\tan x| \leqslant \frac{4|x|}{\pi}.$$

---

40 Montrer l'inégalité $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \ln \frac{x+y}{2}$ pour tous $x,y>1$.

---

41 Montrer que pour tous $a,b,x,y>0$:
$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}.$$

---

42 Montrer que pour tous $x\in[-1,1]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda.$$

---

43 Soit $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave positive.
1) Montrer que $\dfrac{f(x+y)}{x+y} \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$ pour tous $x,y>0$.
2) En déduire que f est *sous-additive*, i.e. que pour tous $x,y\geqslant 0$: $\quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.
3) En déduire que $(x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha+y^\alpha$ pour tous $x,y\geqslant 0$ et $\alpha\in[0,1]$.

44
1) Étudier la convexité/concavité de $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que pour tous $x_1,\dots,x_n\geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\dots x_n}}.$$

45
1) Étudier la convexité/concavite de $x\longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+1)$.
2) Montrer que pour tous $x_1,\dots,x_n>0$:
$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+x_k)}.$$
3) En déduire que pour tous $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n>0$:
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k+y_k)}.$$

CONVEXITÉ, SÉCANTES ET TANGENTES

46 On pose $f(0)=0$ puis $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ pour tout $x\in\,]0,1[$. Étudier la continuité, la dérivabilité et la convexité/concavité de f, ses points d'inflexion et les tangentes en ces points. Tracer l'allure de son graphe.

---

47 Soit I un intervalle. Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sur I.

---

48 Soit $f\in\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que si f est convexe sur $[a,b[$, elle l'est sur $[a,b]$ tout entier.

---

49 Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe positive pour laquelle $f(a)=f(b)=0$. Montrer que f est identiquement nulle.

---

50 Déterminer l'ensemble des fonctions convexes majorées définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

51
1) a) La somme de deux fonctions convexes est-elle toujours convexe ?
b) Le produit de deux fonctions convexes est-il toujours convexe ? Et en cas de positivité ?
2) a) Soient I et J deux intervalles et $f:I\longrightarrow J$ et $g:J\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante, alors $g\circ f$ est convexe.
b) La composée de deux fonctions convexes est-elle toujours convexe ?
3) a) Le maximum de deux fonctions convexes est-il toujours une fonction convexe ?
b) Le minimum de deux fonctions convexes est-il toujours une fonction convexe ?
4) Soient I un intervalle ouvert et f une fonction convexe bijective de I sur son image J. Montrer que f est strictement monotone sur I, puis que f^{-1} est convexe ou concave sur J.

---

52 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe possédant une limite finie en $+\infty$.
1) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) **a)** Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :
$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
b) Montrer que le résultat de la question **a)** est faux sans l'hypothèse de convexité.

---

53 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable pour laquelle $ff'' = 0$. On note Z l'ensemble des zéros de f.

1) Montrer que f^2 est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que Z est un intervalle.

3) Montrer que f est affine si Z est l'ensemble vide, un singleton ou $\mathbb{R}$ tout entier.

4) On suppose désormais que Z contient au moins deux éléments et n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer que Z est majoré ou minoré, puis en considérant sa borne supérieure ou inférieure, dénicher une contradiction.

---

54 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

2) On suppose a réel. Étudier la monotonie de la fonction $x \longmapsto f(x) - ax$ et en déduire qu'elle possède une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Comment le graphe de f est-il situé par rapport à son asymptote en $+\infty$ si b est réel ?

---

55 Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On note Γ l'ensemble des réels $c \in I$ pour lesquels f est croissante sur $I \cap [c, +\infty[$.

1) Soient $a, b \in I$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$. Montrer que $b \in \Gamma$.

2) Que dire de f si Γ est vide ?

3) On suppose désormais que Γ est non vide et que f n'est pas croissante sur I.

a) Montrer que Γ possède une borne inférieure γ.

b) Montrer que f est croissante sur $I \cap]\gamma, +\infty[$.

c) Montrer que f est strictement décroissante sur $I \cap]-\infty, \gamma[$.

4) Conclusion ?

---

56 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I.

2) Montrer que si f est dérivable sur I, elle y est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.

3) Soient $a, b \in I$ deux réels pour lesquels $a < b$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

---

57 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction bornée pour laquelle $0 \leqslant f \leqslant f''$.

1) Montrer que f est décroissante.

2) Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Étudier le signe de $x \longmapsto \big(f'(x) + f(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}$, puis les variations de $x \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{x}$.

4) En déduire que $f(x) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \geqslant 0$.

---

58 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ pour tous $x, y \in I$. Montrer que f est convexe sur I.
