Ce ne sera jamais précisé,
mais dans chacun des exercices ci-dessous,
les variables aléatoires manipulées sont définies
sur un même espace probabilisé fini.

FORMULE DE BAYES

1 Dans une usine, trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses sont 3% pour A, 4% pour B et 5% pour C. Une pièce choisie au hasard se trouve défectueuse. Avec quelle probabilité a-t-elle été fabriquée par la machine A ?

---

2 Dans une population donnée, deux maladies M_1 et M_2 sont observables chez respectivement 10% et 20% des individus. On suppose que le nombre des malchanceux qui souffrent à la fois de M_1 et M_2 est négligeable — nul, pour simplifier. On entreprend un dépistage systématique de ces maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90% des malades de M_1, 70% des malades de M_2 et 10% des individus sains.

1) Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pour lequel le test est positif soit atteint de la maladie M_1 ? Même question avec M_2.

---

3 Dans une population donnée, un individu sur 8 est blond. On sait en outre que deux blonds sur trois ont les yeux bleus et que 80% des individus qui ont les yeux bleus sont blonds. Quelle est la proportion des individus qui ne sont pas blonds mais qui ont les yeux bleus ?

---

4 On dispose de 4 dés à 6 faces, dont un pipé, qui tombe sur 1 avec probabilité $\frac{5}{6}$ et donne une même probabilité aux autres faces. On choisit au hasard un dé parmi les 4, on le lance $2n$ fois et on obtient n fois l'entier 1. Avec quelle probabilité le dé choisi est-il pipé ?

MANIPULATION FORMELLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

5 Soit X une variable uniforme sur $[\![1,20]\!]$. Déterminer la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.

---

6 Soit X une variable uniforme sur $[\![1,6n]\!]$. Déterminer la loi de $\cos\frac{X\pi}{3}$.

---

7 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in\,]0,1[$ et X une variable binomiale de paramètre (n,p). Pour quelle valeur de $k\in[\![0,n]\!]$ la probabilité $P(X=k)$ est-elle maximale ?

---

8 Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[\![1,2p]\!]$. Avec quelle probabilité le produit $X_1\ldots X_n$ est-il pair ?

---

9 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose X et Y *symétriques*, i.e. que X et $-X$ (resp. Y et $-Y$) ont même loi.

1) Montrer que (X,Y) et $(X,-Y)$ ont même loi, puis que :
$$P\big(X^2=Y^2\big)=2\,P(X=Y)-P(X=0)\,P(Y=0).$$

2) Montrer que $P(X+Y\geqslant 0)=P(X+Y\leqslant 0)$.

---

10 Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[\![1,n]\!]$.
On pose $M=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

1) Calculer $P(M\geqslant k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, puis en déduire la loi de M.

2) Montrer que $P\big(\exists\, i\in[\![1,n]\!],\quad X_i=1\big)\geqslant 1-\frac{1}{e}$.

---

11 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)\,P(Y\leqslant y).$$
Montrer que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$P(X=x,\ Y\leqslant y)=P(X=x)\,P(Y\leqslant y),$$
puis que X et Y sont indépendantes.

---

12 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[\![1,n]\!]$.

1) Déterminer la loi de $X+Y$.

2) Calculer $P(X+Y=Z)$.

---

13 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi.

1) Calculer $P(X=Y)$ dans le cas où X et Y sont uniformes sur $[\![0,n]\!]$, puis dans le cas où X et Y sont binomiales de paramètre $\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

2) Comparer les résultats obtenus en **1)** lorsque n tend vers $+\infty$. Explication ? On admet ici la *formule de Stirling* : $\quad n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}$.

3) On note à présent $u_0,\ldots,u_n$ les valeurs communes de X et Y et on pose $p_k=P(X=u_k)$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Étudier les variations de la fonction $t\longmapsto\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-t}{n+1}+tp_k\right)^2$ sur $[0,1]$, puis en déduire que $P(X=Y)\geqslant\frac{1}{n+1}$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ? Explication ?

14 Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle pour laquelle $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. On se donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une variable binomiale X_n de paramètre (n, p_n). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

15 Soient $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$. On pose $Y_k = X_1 \ldots X_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et :

$$u_k = P(Y_k = 1) \qquad \text{et} \qquad v_k = P(Y_k = -1).$$

1)
- a) Exprimer u_{k+1} et v_{k+1} en fonction de u_k et v_k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
- b) Déterminer, en calculant $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, une expression explicite de u_k et v_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Interpréter le résultat pour de grandes valeurs de k.

2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : (i) $p = \frac{1}{2}$.
(ii) Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
(iii) $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.

16 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Est-il possible que la somme $X + Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$?

17 Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
1) À quelle condition un événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est-il indépendant de lui-même ?
2) Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements indépendants pour lesquels $P(A_k) \in]0,1[$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $|\Omega| \geqslant 2^n$.

MODÉLISATION PROBABILISTE

18 On permute aléatoirement les lettres du mot BAOBAB. Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore BAOBAB ?

19 On dispose de quatre dés A, B, C et D non pipés, connus comme les *dés non transitifs d'Efron* :
- les faces du dé A sont 0, 0, 4, 4, 4, 4,
- les faces du dé B sont 3, 3, 3, 3, 3, 3,
- les faces du dé C sont 2, 2, 2, 2, 6, 6,
- les faces du dé D sont 1, 1, 1, 5, 5, 5.

On lance ces dés simultanément et on note A le numéro obtenu sur le dé A, B le numéro obtenu sur le dé B, etc.
1) Calculer $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ ainsi que $P(D > A)$.
2) Deux joueurs s'affrontent à présent. Le joueur 1 choisit le dé qu'il veut parmi les 4 et le lance, puis le joueur 2 fait de même avec les 3 dés restants. Est déclaré gagnant le joueur qui a obtenu le le plus grand numéro. Est-il préférable d'être le joueur 1 ou le joueur 2 ?

20 On lance 4 fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Avec quelle probabilité obtient-on :
1) au moins un 6 ? 2) exactement un 6 ?
3) au moins 2 faces identiques ?

21 Une urne contient 6 boules blanches et 6 noires.
1) Lorsqu'on tire simultanément 8 boules, avec quelle probabilité tire-t-on toutes les blanches ?
2) On répète à présent n fois avec remise l'expérience aléatoire de la question **1)**. À partir de quelle valeur de n la probabilité de tirer toutes les boules blanches est-elle supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

22 Une loterie a lieu chaque semaine. On y vend 100 billets de 1€ dont seulement 3 sont gagnants. Si on veut jouer 5€ pour obtenir au moins un billet gagnant, vaut-il mieux acheter 5 billets une même semaine ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

23 Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 — alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

24 Dans une fête foraine, on vous propose le jeu suivant — trois verres opaques sont retournés devant vous dont l'un seulement abrite une bille et vous devez deviner lequel.
1) Quelle probabilité avez-vous de deviner juste ?
2) Pris de pitié devant votre malchance à répétition, le maître du jeu décide de vous donner un coup de pouce. Après votre réponse, il vous indique, parmi les deux verres que vous n'avez pas désignés, un verre qui ne contient pas la bille et vous propose de revoir votre réponse. Préférez-vous confirmer votre réponse initiale ou la modifier ?

25 Une urne contient n boules noires et b blanches que l'on tire toutes une à une sans remise. Calculer la probabilité des événements :
1) « La première boule tirée est noire, la deuxième blanche ».
2) « On tire chaque fois une boule de couleur différente de la précédente ».

26 ◷◷ On choisit simultanément deux entiers distincts entre 1 et n — premier tirage — puis indépendamment, trois entiers distincts entre 1 et n — deuxième tirage.

1) Avec quelle probabilité les entiers tirés au premier tirage le sont-ils aussi au deuxième ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

---

27 ◷◷ Une urne, dite *de Pólya*, contient au départ une boule noire et une blanche. On répète n fois l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule, à la remettre et à ajouter une boule supplémentaire de la même couleur.

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, combien l'urne contient-elle de boules à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ expérience ?
2) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ expérience. Montrer par récurrence que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k+1]\!]$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

---

28 ◷◷ Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1,n]\!]$. On note N le plus grand entier k de $[\![1,n]\!]$ pour lequel $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$. Déterminer la loi de N.

---

29 ◷◷

1) On range k objets dans n tiroirs. Avec quelle probabilité se retrouvent-ils dans des tiroirs distincts ?
2) À partir de combien de personnes dans un groupe la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire est-elle plus grande que $\dfrac{1}{2}$? Et pour 0,9 ? Et 0,99 ? On fera l'hypothèse que le 29 février n'existe pas et on n'hésitera pas à utiliser une calculatrice.
3) Soit $t > 0$. On reprend le contexte de la question **1)** avec $k = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$ et on note p_n la probabilité de l'événement « Les k objets se retrouvent dans des tiroirs distincts ».
   a) Montrer que : $\quad -x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   b) ◷◷◷ En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

---

30 ◷◷ Après avoir effectué n lancers d'un dé à 6 faces, on lance une pièce autant de fois qu'on a obtenu 6 avec le dé. On note S le nombre de 6 obtenus avec le dé et F le nombre de faces obtenues avec la pièce.

1) Montrer que pour tous $s \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,s]\!]$:
$$\binom{s}{k}\binom{n}{s} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}.$$
2) Quelle est la loi de S ? Montrer que $F \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{12}\right)$.

---

31 ◷◷ Deux joueurs lancent chacun n fois un dé équilibré à 6 faces. Ils lancent à chaque coup leurs dés en même temps. Avec quelle probabilité obtiennent-ils chacun leur premier 6 en même temps ?

Suites récurrentes et chaînes de Markov

32 ◷◷ Au petit-déjeuner, je mange soit des tartines, soit des céréales. Si je me prépare des tartines un matin, je mange de nouveau des tartines le lendemain avec probabilité $\dfrac{3}{4}$, mais si je me fais des céréales, j'en remange le lendemain avec probabilité $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour que je me fasse des tartines le $n^{\text{ème}}$ jour au petit-déjeuner. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

---

33 ◷◷ Chou le chaton a trois passions dans la vie — manger, dormir et jouer — et on peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5min.

— Après 5min de repas, il continue de manger les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et sinon se met à jouer.
— Après 5min de somme, il continue de dormir les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{3}{4}$ et sinon il a faim au réveil et va manger.
— Après 5min de jeu, soit il est en appétit et mange les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note m_n la probabilité qu'il mange entre les minutes $5n$ et $5n+5$, d_n la probabilité qu'il dorme et j_n la probabilité qu'il joue, et on pose $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$.

1) Trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $C_{n+1} = MC_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) a) Calculer $4M^3 - 5M^2$, puis en déduire un polynôme annulateur P de M.
   b) En déduire les puissances de M.
   c) En déduire les limites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

34 Un joueur joue n parties d'un jeu de probabilité de gain $\dfrac{2}{3}$. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on note G_k l'événement « Le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie » et C_k l'événement « Le joueur gagne les $k^{\text{ème}}$ et $(k+1)^{\text{ème}}$ parties et c'était la première fois qu'il gagnait deux parties consécutives » ainsi que p_k la probabilité de C_k.

1) ◷◷
   a) Calculer p_1 et p_2 et justifier pour tout $k \in [\![1,n-3]\!]$ l'égalité $P_{\overline{G_1}}(C_{k+2}) = p_{k+1}$.
   b) En déduire que $p_{k+2} = \dfrac{1}{3}p_{k+1} + \dfrac{2}{9}p_k$ pour tout $k \in [\![1,n-3]\!]$, puis une expression de p_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$.

2) On souhaite formaliser mieux les raisonnements précédents. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire de valeur 1 si le joueur gagne la $i^{\text{ème}}$ partie et 0 s'il la perd. On note aussi T le plus petit entier $k \in [\![2, n]\!]$, s'il existe, pour lequel $X_k = X_{k+1} = 1$, et on pose $T = +\infty$ sinon.

- **a)** Montrer que $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_2, \ldots, X_{k+1})$ ont même loi pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
- **b)** En déduire que $P_{\{X_1=0\}}(T = k+1) = P(T = k)$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$. Assurez-vous enfin d'avoir bien compris le lien qui unit les questions **1)** et **2)** !

RÉUNIONS D'INTERSECTIONS !

35 On lance $2n$ fois une pièce et on note F_k l'événement « On obtient face au $k^{\text{ème}}$ lancer » pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$. La pièce est truquée et tombe sur face avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.

1) Décrire à l'aide de $F_1, \ldots, F_{2n}$ les événements :

- **a)** A « On obtient une alternance parfaite de piles et de faces ».
- **b)** B « On obtient exactement un pile ».
- **c)** C « On n'obtient jamais pile suivi de face ».

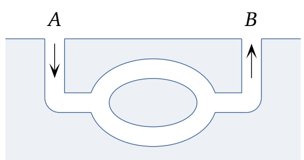
2) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

36 Smokie le renard poursuit Cacao la taupe pour la croquer. Pour lui échapper, Cacao pénètre son terrier par l'entrée A devant laquelle Smokie fait le guet, et à chaque intersection, elle tourne à gauche ou à droite avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. L'alternative est la suivante :

- Si Cacao sort de son terrier par l'entrée A, Smokie la croque.
- Si Cacao rencontre strictement plus de $2n$ intersections dans son terrier sans en sortir, elle s'épuise et meurt d'inanition.

1) Si Cacao sort de son terrier par l'entrée B, que peut-on dire du nombre d'intersections qu'elle a rencontrées ?

2) Avec quelle probabilité la taupe Cacao parvient-elle à s'extraire de cette situation périlleuse ? Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?



37

1) Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu dont A joue la première partie, B la deuxième, A la troisième, B la quatrième, etc. Le premier qui gagne une partie gagne le jeu tout entier et le jeu comporte au plus $2n$ parties. La probabilité de gain d'une partie vaut a pour le joueur A et b pour le joueur B avec $a, b \in]0, 1[$.

- **a)** Quelle est la probabilité pour qu'aucun des deux joueurs ne gagne ?
- **b)** Calculer la probabilité pour que A (resp. B) gagne le jeu complet. À quelle condition nécessaire et suffisante le jeu est-il équilibré ?

2) On en sait maintenant plus sur le jeu auquel s'adonnent A et B. Ils disposent de 2 dés équilibrés à 6 faces et les lancent à tour de rôle.

- Quand A joue, il gagne la partie si la somme des faces qu'il obtient est supérieure ou égale à 8.
- Quand B joue, il gagne si le maximum des faces qu'il obtient est supérieur ou égal à 4.

Des deux joueurs, lequel a le plus de chances de gagner ?

FORMULE DU CRIBLE

38 On lance un dé équilibré à 6 faces n fois de suite.

1) Calculer la probabilité de l'événement « La face i n'apparaît jamais » pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$.

2) Calculer la probabilité de l'événement « Chacune des faces 1, 2 et 3 apparaît au moins une fois ».

39 Quand on lance un dé tétraédrique, 3 faces sont visibles et une seule reste cachée. On lance n fois de suite un tel dé, dont les faces sont notées 1, 2, 3 et 4.

1) Calculer pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$ la probabilité de l'événement « La $i^{\text{ème}}$ face est visible à chaque lancer ».

2) Calculer la probabilité de l'événement « Chaque face est restée cachée au moins une fois ».

40 Joyeux Noël ! Les n convives ont tous posé un cadeau près du grand sapin. À minuit, on distribue au hasard un cadeau à chaque convive, éventuellement celui qu'il a apporté.

1) À combien estimez-vous intuitivement la probabilité de l'événement E « Personne n'a reçu son propre cadeau » lorsque n est grand ?

2) On appelle *dérangement de* $[\![1, n]\!]$ toute permutation sans point fixe de $[\![1, n]\!]$. On notera D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, F_k l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qui fixent k. Montrer que $|D_n| = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3) Calculer la probabilité de l'événement E de la question **1)**, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. On rappelle que $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

41 On forme un mot de 7 lettres à partir des 26 lettres de l'alphabet. Avec quelle probabilité le mot OUI apparaît-il au moins une fois quelque part dans ce mot ?