ESPACES VECTORIELS, SOUS-ESPACES VECTORIELS

1

1) Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(1, -a, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$?

2) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \cos(2x)$?

3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus ?

---

2 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \ x = y\right\}$.

2) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 2x - 5y - 1 = 0\right\}$.

3) $\left\{(x, 2x, 3x) \mid \ x \in \mathbb{R}\right\}$.

4) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^3 + x + y^2 = 0\right\}$.

5) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = y \ \text{ et } \ 3y - 2z = 0\right\}$.

6) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \ P = 0 \ \text{ ou } \ \deg(P) \geqslant 2\right\}$.

7) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \ P(X^2) = P' + X^4 P\right\}$.

8) $\left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \ f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$.

---

3 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

1) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.

2) L'ensemble des fonctions croissantes.

3) L'ensemble des fonctions monotones.

4) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

5) L'ensemble des fonctions majorées.

6) L'ensemble des fonctions bornées.

---

4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :

$$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$

Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

---

5 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :

1) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2 \ \text{ et } \ 2x + y + 2z = 1\right\}$.

2) $\left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \ \mathrm{tr}(M) = 1\right\}$.

3) $\left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \ f(0) = 2 \ \text{ et } \ f(1) = -3\right\}$.

4) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \ \forall k \in [\![1, n]\!], \ P(k) = \sqrt{k}\right\}$.

---

6 Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big).$$

---

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Vect}\big(x \longmapsto \cos(kx)\big)_{0 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}\big(x \longmapsto \cos^k x\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$

FAMILLES LIBRES

8 Montrer que $\left(x \longmapsto e^x, x \longmapsto e^{2x}, x \longmapsto e^{x^2}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1) par une technique d'évaluation.

2) par une étude asymptotique en $+\infty$.

---

9 Montrer de deux manières différentes que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(n^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---

10 On pose $P_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P_k = X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1).$$

Montrer de deux manières différentes que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

---

11 Montrer que les suites $\left(n^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$, k décrivant $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---

12 Montrer que la famille des fonctions $x \longmapsto x^k \cos x$ et $x \longmapsto x^k \sin x$, k décrivant $\mathbb{N}$, est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

13 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $v_k = u_1 + \ldots + u_k$.

1) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ l'est.

2) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E.

---

14 Montrer que la famille $\big(x \longmapsto |x - a|\big)_{a \in \mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

---

15 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *à diagonale strictement dominante*, i.e. pour laquelle $\displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne pour laquelle $AX = 0$. Montrer que $X = 0$ grâce au réel $\max\left\{|x_1|, \ldots, |x_n|\right\}$. Qu'en déduit-on sur A ?

16

1) Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *matrice de Vandermonde de* $x_1,\dots,x_n$ la matrice :
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que V est inversible si et seulement si les scalaires $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.

2) On veut montrer que la famille $\big((X+k)^n\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$ pour tout $p \in [\![0,n]\!]$.

b) Conclure grâce au résultat de la question **1)**.

c) Conclure autrement en utilisant des polynômes de Lagrange.

---

17 Montrer que la famille $\big(x \longmapsto e^{ax}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre :

1) en s'intéressant au comportement asymptotique des exponentielles.

2) en utilisant une matrice de Vandermonde.

3) en utilisant des polynômes de Lagrange.

---

18 Montrer que la famille $\big(x \longmapsto \sin(ax)\big)_{a\in\mathbb{R}_+^*}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

BASES ET DIMENSION

19 Énoncer proprement en termes linéaires le résultat du cours sur les suites réelles récurrentes linéaires d'ordre 2 (sous-espace vectoriel, base, dimension...).

20

1) Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

2) Montrer que la famille :
$$\big(X^3+X^2-X-1\ ,\ X^3-X^2+1\ ,\ X^3-X^2+X\ ,\ X^3+2X+1\big)$$
est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Montrer que $\big(1+X, X+X^2,\dots,X^{n-1}+X^n, X^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

21 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base :

1) $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x+2y+z=0\big\}$.

2) $\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid\ x+y-z-t=0 \text{ et } 3x-y-z+t=0\big\}$.

3) $\big\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid\ AM=MA\big\}$ avec $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1\end{pmatrix}$.

4) $\big\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid\ P(1-X)=P(X)\big\}$.

5) $\big\{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid\ P(-1)=P(0)=P(1)\big\}$.

---

22 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ dont les vecteurs non nuls ont tous le même degré. Montrer que $\dim E \leqslant 1$.

---

23 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Peut-on extraire de $\mathscr{B}$ une base de F ?

24

1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) une base de E. On pose $\varepsilon_1=e_1+e_2+e_3$ et $\varepsilon_2=e_1-2e_3$. Montrer que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E.

2) Montrer que la famille $\big((8,4,1,2),(1,0,3,5)\big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

3) Montrer que la famille :
$$\big(X^4+X^3+1, X^4-X^3-2X^2+2, X^2+3\big)$$
est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

---

25 Déterminer de tête la dimension des sous-espaces vectoriels suivants, en argumentant mais sans preuve formelle détaillée :

1) $\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{K}^4 \mid\ x+y-z+t \text{ et } x-3y+2z-t=0\big\}$.

2) $\big\{P\in\mathbb{K}_4[X] \mid\ P(1)=P(-1)=0\big\}$.

3) $\big\{P\in\mathbb{K}_n[X] \mid\ P(-X)=P(X)\big\}$.

4) $\big\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid\ \forall i,j\in[\![1,n]\!],\ i<j \implies m_{ij}=0\big\}$.

5) $\big\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ m_{i1}+\ldots+m_{in}=0\big\}$.

---

26 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et calculer leur dimension :

1) $\big\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid\ \mathrm{tr}(M)=0\big\}$.

2) $\big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+p}=u_n\big\}$ $(p\in\mathbb{N}^*)$.

3) $\big\{x\longmapsto A\sin(x+\varphi) \mid\ A,\varphi\in\mathbb{R}\big\}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

27 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$ et $d\in[\![1,n-1]\!]$. Montrer que E contient une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension d.

---

28 Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Déterminer un entier $d\in\mathbb{N}$ pour lequel la famille $\big(I_n, M, M^2,\dots,M^d\big)$ est liée.

2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.

---

29 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les trois fonctions $x \longmapsto \sin(x+a)$, $x \longmapsto \sin(x+b)$ et $x \longmapsto \sin(x+c)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

30 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$ linéairement indépendants. Calculer $\mathrm{rg}(x_i - x_j)_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$.

---

31 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E est de dimension finie en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \times \dim_{\mathbb{C}} E$.

---

32 Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A et B le sont.

---

33 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices pour lesquelles $AB = A^2 + A + I_n$. Montrer que $AB = BA$.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

34 Soient $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes pour lesquels $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer par une technique matricielle que la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

---

35 Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1) $(u_1, \ldots, u_n)$ avec $u_k = (k, k-1, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) $\big((2,0,\alpha), (2,\alpha,2), (\alpha,0,2)\big) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

3) $\big((1,0,2,1), (0,1,1,2), (2,0,1,1), (2,1,0,1)\big)$.

---

36 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_{2n+1})$ une famille libre de E. Montrer que la famille :
$$\big(u_1+u_2, u_2+u_3, \ldots, u_{2n}+u_{2n+1}, u_{2n+1}+u_1\big)$$
est libre elle aussi par une technique matricielle.

Sommes de sous-espaces vectoriels

37 Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

38 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E pour lesquels $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

---

39 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G = F + G$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

---

40 On pose $a = (0,0,1,0)$, $b = (1,1,0,-1)$, puis $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$ et $w = (1,1,1,1)$, ainsi que $F = \mathrm{Vect}(a,b)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Calculer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.

---

41 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathrm{Vect}\big((\lambda,\lambda,1)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((1,\lambda,1),(2,1,1)\big)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

---

42 Montrer que les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires :

1) $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\big)$ et :
$$G = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x+y+z=0 \quad \text{et} \quad y-z+t=0\Big\}.$$
dans $\mathbb{R}^4$.

2) $F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\Big|\; P\big(X^2\big) = X^2 P(X)\Big\}$ et :
$$G = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\Big|\; P(1) = P(2)\Big\}$$
dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3) F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et $G = \left\{g \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \;\middle|\; \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ dans $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

43

1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :
$$F = (F \cap G) \oplus H.$$
Montrer que $F + G = G \oplus H$.

2) Trouver un espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels F, G et H de E pour lesquels $E = F \oplus G$ mais $H \neq (F \cap H) \oplus (G \cap H)$.

---

44 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G. Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

---

45 Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\mathrm{Vect}\big((1,2,1,1),(2,2,1,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$.

2) $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid \quad x+y+2z-t=0 \text{ et } 2x+y-z+t=0\right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

3) $\left\{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid \quad P(-X)=P(X)\right\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

4) $\left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid \quad P'+3P=P(0)X^3+P(1)X+P(1)\right\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

5) $\left\{P\in\mathbb{R}[X] \mid \quad P(1)=P(2)=0\right\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

6) $\left\{f\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f(0)=f'(0)=0\right\}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7) $\left\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad \forall k\in[\![1,n]\!],\quad f(x_k)=0\right\}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ distincts fixés.

---

46 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de mêmes dimensions de E. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun dans E.

---

47 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont en somme directe, de même que $F+G$ et H.

(ii) F, G et H sont en somme directe.

---

48 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels $E=F_1+\ldots+F_p$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1,\dots,G_p$ de E pour lesquels $G_i\subset F_i$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ et $E=G_1\oplus\ldots\oplus G_p$.

49

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{K}[X]=E_0\oplus\ldots\oplus E_{n-1}$, avec pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$:

$$E_i=\left\{X^iP(X^n) \mid \quad P\in\mathbb{K}[X]\right\}.$$

2) Montrer que $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}=E_0\oplus E_1\oplus E_2$, avec pour tout $k\in[\![0,2]\!]$:

$$E_k=\left\{f\in\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \mid \quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f(\mathrm{j}x)=\mathrm{j}^kf(x)\right\}.$$

CORPS DE BASE EXOTIQUES

50 Soient M un corps, L un sous-corps de M et K un sous-corps de L. On suppose M de dimension finie sur L et L de dimension finie sur K. Montrer que M est de dimension finie sur K et que :

$$\dim_K M=\dim_L M\times\dim_K L.$$

51

1) a) Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-*libre*, i.e. libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p.

On peut montrer que $\ln r$ est irrationnel pour tout $r\in\mathbb{Q}_+^*\setminus\{1\}$, mais c'est autrement plus compliqué.

2) a) Montrer que la famille $\left(1,\sqrt{p}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre pour tout $p\in\mathbb{P}$.

b) En déduire que la famille $\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre.

---

52 Soient $p\in\mathbb{P}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $d\in[\![0,n]\!]$, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_p^n$ de dimension d est de cardinal p^d.

2) Combien $\mathbb{F}_p^n$ possède-t-il de bases ? En déduire que :

$$\left|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)\right|=\prod_{k=0}^{n-1}\left(p^n-p^k\right).$$

3) On note G l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{F}_p)$ dont les coefficients diagonaux valent $\overline{1}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et vérifier que $|G|$ est la plus grande puissance de p qui divise $\left|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)\right|$.

---

53 Montrer que tout corps fini est de cardinal une puissance de nombre premier.
