LIMITES

1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}\right)$.

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.

3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ $\quad(m,n\in\mathbb{N})$.

---

2 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ et $\lim_{x\to0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.

3) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\operatorname{ch}x+x^2}$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\operatorname{ch}x+x^2}$.

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+\sin x\right)^2$. 5) $\lim_{x\to1}(\ln x)(\ln\ln x)$.

6) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin e^x+e^{\sin x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. 7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x^2}+x}$ $\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

---

3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. 2) $\lim_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\sin(2x)}$.

3) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ $\quad(\alpha\in\mathbb{R}^*,\beta\in\mathbb{R})$.

4) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{x^2\ln(1+2x)-x^4}$.

5) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$ et $\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$.

6) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ et $\lim_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ $\quad(\alpha\in\mathbb{R})$.

---

4 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite : 1) $x\longmapsto\sin(\cos x)$ en $+\infty$.

2) $x\longmapsto\dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$.

3) $x\longmapsto\cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

---

5 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction possédant une limite $\ell\in\mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)^x$ dans le cas où $\ell\neq1$.

2) Trouver un exemple de fonction f pour laquelle $\ell=1$ et $f(x)^x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (resp. 2, resp. $+\infty$).

---

6 Soient $f:E\longrightarrow\mathbb{C}$ et $g:E\longrightarrow\mathbb{C}$ deux fonctions, $a\in E$ et $\ell,\ell'\in\mathbb{C}$. Montrer en revenant à la définition que si $f\underset{a}{\longrightarrow}\ell$ et $g\underset{a}{\longrightarrow}\ell'$, alors :

1) $f+g\underset{a}{\longrightarrow}\ell+\ell'$. 2) $fg\underset{a}{\longrightarrow}\ell\ell'$.

3) $\dfrac{1}{f}\underset{a}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\ell}$ si $\ell\neq0$.

---

7 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x,y>0$: $\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\dfrac{x}{y}$.

---

8 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

---

9 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $x\longmapsto\lim_{x^-}f$ est croissante.

---

10 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante non identiquement nulle pour laquelle pour tous $x,y>0$:

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

1) Montrer que $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Que vaut $\lim_0 f$?

2) Résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

11 Déterminer tous les endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$.

CONTINUITÉ, POINT DE VUE LOCAL

12 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes : 1) $x\longmapsto\dfrac{x\ln x}{x-1}$.

2) $x\longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$. 3) $x\longmapsto\lfloor x\rfloor+\left(x-\lfloor x\rfloor\right)^2$.

4) $x\longmapsto\sqrt{\dfrac{\operatorname{Arcsin}(1-x)}{1-x}}$. 5) $x\longmapsto\left(1+x(\ln x)^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6) $x\longmapsto(-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\dfrac{1}{2}\right)$.

---

13 Montrer que pour tous $f,g\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $\max\left\{f,g\right\}$ et $\min\left\{f,g\right\}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

14

1) Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est décroissante et $x\longmapsto xf(x)$ croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) En déduire que $x\longmapsto\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2t+x^2\sin^2t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

15 Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

1) Soient $f,g\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles $f|_D=g|_D$. Montrer que $f=g$.

2) Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $f|_D$ est strictement croissante, alors f l'est aussi.

---

16 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et surjective de $[a,b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

17
1) Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, O un ouvert de $\mathbb{K}$ et F un fermé de $\mathbb{K}$. Montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2) Montrer que le résultat de la question **1)** peut être faux si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

---

18 On rappelle qu'une période est par définition strictement positive.
1) Trouver un exemple de fonction périodique non constante sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas une plus petite période.
2) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que tout segment de longueur supérieure à a rencontre $a\mathbb{Z} + b$.
3) Montrer qu'une fonction continue périodique non constante sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période.

---

19 On pose $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{p+q}$ pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de f.

Équations fonctionnelles

20
1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 pour lesquelles $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f(2x) - f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

21 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

---

22 On s'intéresse aux fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
1) Faire un dessin, puis formuler une conjecture.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions étudiées. Pour une solution f, on pourra montrer que la fonction $f - f(0)$ est solution d'une autre équation fonctionnelle intéressante.

---

23 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ pour lesquelles $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y > 0$.

24
1) Montrer que : $\sin\dfrac{x}{2^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k} = \dfrac{\sin x}{2^n}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f(2x) = f(x)\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

25 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f\big(x^2 + f(y)\big) = f(x)^2 + y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Continuité, point de vue global

26
1) Décrire l'ensemble $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{Z})$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $|f|$ est constante sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi. Et si f est à valeurs complexes ?

---

27 Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède une racine réelle.

---

28 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Justifier la bonne définition du réel $a = \inf\big\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\big\}$, puis montrer que $f(a) = 0$.

---

29 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que f possède un point fixe si :
1) $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$. 2) $[a,b] \subset f\big([a,b]\big)$.

---

30 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On suppose que I est stable par f et que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.

---

31 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

---

32 Un randonneur parcourt 6km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il a parcouru exactement 3km.

---

33 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) = f(1)$. Montrer que $f\left(c + \dfrac{1}{n}\right) = f(c)$ pour un certain $c \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$.

---

34 Montrer que les fonctions suivantes sont bornées :
1) $x \longmapsto e^x \sin e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{e^x - 1}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

35 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède des limites finies en a et b. Montrer que f est bornée sur $]a,b[$. Y possède-t-elle un maximum et un minimum ?

---

36 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que f possède une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

---

37 Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

---

38 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$. Attention, c'est plus subtil qu'il n'y paraît !

---

39 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède des limites égales dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et b. Montrer que f n'est pas injective.

---

40 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On pose $u_n = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

---

41 Soient $f, g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que les graphes de f et g possèdent un point d'intersection dans chacune des situations suivantes :

1) $f\big([a,b]\big) \subset g\big([a,b]\big)$.
2) $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.
3) $f \circ g = g \circ f$ et $[a,b]$ est stable par f et g.

---

42 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 3f(x)$. $\quad$ Montrer que f est identiquement nulle.

---

43 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une infinité de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$.

---

44 Soit $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$.

1) a) Montrer que si :
$$f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
alors $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire que si $f(x+a) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour certains $a > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors :
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{a}.$$

2) On suppose que $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y > 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)$.

CONVERGENCE SIMPLE, CONVERGENCE UNIFORME

45 Étudier les convergences simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

1) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e^{-n} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{e^{-n}\}. \end{cases}$

2) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3) $f_n(x) = \min\left\{n, \dfrac{1}{x}\right\}$ pour tout $x > 0$.

46

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.
   a) À quelle condition nécessaire et suffisante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
   b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[\varepsilon,1]$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2) On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais qu'elle converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.

47

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ pour tous $x > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n$.
2) En déduire que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$, dite *fonction ζ de Riemann*, est définie et continue sur $]1,+\infty[$.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$ et montrer que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
