CONJUGUÉ, MODULE, INVERSE

1

1) Exprimer de tête sous forme algébrique :
 a) $(2-\mathrm{i})(3+6\mathrm{i})$. b) $\dfrac{2}{1+3\mathrm{i}}$. c) $(1+\mathrm{i})^4$.
 d) $(3+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$. e) $\dfrac{4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$. f) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer de tête en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$: $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)$, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(z^2\right)$.

---

2 Résoudre géométriquement et par le calcul les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) $\overline{z} = z$. 2) $|z-1| = |z|$.
3) $|z| = \mathrm{Re}(z)$. 4) $|z| = |z+1| = 1$.

---

3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) $1+\overline{z} = |z|$. 2) $\overline{z}(z-1) = z^2\left(\overline{z}-1\right)$.

---

4 Soient $u, v \in \mathbb{C}$.
1) Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$. Quelle interprétation géométrique ?
2) Montrer que $|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$ et étudier le cas d'égalité. Quelle interprétation géométrique ?

---

5 Montrer que si deux entiers naturels sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi.

---

6 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:
$$\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}\right)^2 = 2z.$$
En quoi est-ce intéressant ?

7

1) Simplifier $|1+\mathrm{i}z|^2 + |z+\mathrm{i}|^2$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.
2) Montrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
3) Montrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{U}$.
4) Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{U}$ pour lesquels $zz' \neq -1$.

8

1) On note f la fonction $z \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ pour lesquels :
 a) $\left|f(z)\right| = 1$. b) $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = 0$.
2) On note g la fonction $z \longmapsto \dfrac{2z-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ pour lesquels :
 a) $g(z) \in \mathbb{R}$. b) $\left|g(z)\right| = 1$.

---

9 Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On note f la fonction :
$$z \longmapsto \frac{z-a}{\overline{a}z-1}.$$
1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2) Montrer que f est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

---

10 Montrer que pour tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ de même module : $\dfrac{(z_1+z_2)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1\ldots z_n} \in \mathbb{R}$.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

11

1) Développer de tête $(z-1)(z-n)$ et $(z+1)(z-n)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2) Factoriser de tête pour tout $z \in \mathbb{C}$:
 a) $z^2 - 3z + 2$. b) $z^2 - 5z + 6$.
 c) $4z^2 + 4z + 1$. d) $z^2 - 4z - 5$.

---

12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) $z^2+(4-3\mathrm{i})z-2-8\mathrm{i} = 0$. 2) $z^2-5z+4+10\mathrm{i} = 0$.
3) $z^2+5z+7-\mathrm{i} = 0$. 4) $4z^2-16z+11-12\mathrm{i} = 0$.
5) $2z^2 + (8-5\mathrm{i})z + (4-13\mathrm{i}) = 0$.
6) $\left(z^2-2z\right)\cos^2\varphi + 1 = 0$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

---

13 Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ suivants :
1) $\begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y = 3\mathrm{i} \\ xy = -1-3\mathrm{i}. \end{cases}$
3) $\begin{cases} x+y = 1+\mathrm{i} \\ xy = 13\mathrm{i}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y = -a \\ xy = a^2 \end{cases}$ $(a \in \mathbb{C})$.

FORMES TRIGONOMÉTRIQUES

14

1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants : a) $1-\sqrt{2}$. b) $-5\mathrm{i}$.
 c) $2-\mathrm{i}$. d) $\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{19}$. e) $-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{1000}$.
3) Déterminer un argument de $4-3\mathrm{i}$ sous la forme d'un arccosinus et d'un arcsinus.
4) Déterminer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ une forme trigonométrique des nombres suivants :
 a) $1 + \sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$. b) $1 + e^{\mathrm{i}\theta} + e^{2\mathrm{i}\theta}$.

---

15 Simplifier $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+r\,e^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\,e^{\mathrm{i}\theta}}\right)$ pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

16 Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :
1) $(1+\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$. **2)** $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

17 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = \mathrm{Im}\left(z^3\right)$ et représenter graphiquement l'ensemble de ses solutions.
2) $z^3 = z + \overline{z}$.

18 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:
$$\arg(z) = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}.$$

EXPONENTIELLE COMPLEXE

19 Montrer que $\left|\mathrm{e}^z\right| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et étudier le cas d'égalité.

20 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) **a)** $\mathrm{e}^z = 1+\mathrm{i}$. **b)** $\mathrm{e}^z = -5-12\mathrm{i}$.
2) **a)** $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$.
b) $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2\mathrm{i}$. **c)** $\mathrm{e}^z + 2\,\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}$.

21 Déterminer l'image directe par la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ du rectangle $[1,2]+\mathrm{i}[0,\pi]$ ainsi que l'image réciproque du disque de centre 0 et de rayon 1.

22
1) Montrer que pour un certain $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:
$$\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\tan\alpha}} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}.$$
2) En déduire que la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ possède un point fixe de la forme $x+\mathrm{i}\,\alpha$ avec $x \in \mathbb{R}$.

TRIGONOMÉTRIE

23 Primitiver les expressions suivantes :
1) $\cos^2(2x)\sin x$. **2)** $\cos^2 x \sin^4 x$.
3) $\cos(3x)\sin^3(2x)$.

24
1) Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire $\cos^2\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, puis $\sin\frac{\pi}{5}$.

25 On note $\bigstar$ l'équation $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
1) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ solution d'$\bigstar$:
$$x^2+x-1=0 \qquad \text{où } x = z+\frac{1}{z}.$$
2) Montrer que $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$ est solution d'$\bigstar$.
3) En déduire une expression explicite de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

26
1) Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:
$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\,\sin(x-y).$$
2) **a)** Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:
$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y - 4\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{y}{2}\,\sin\frac{x+y}{2}.$$
b) Résoudre l'équation $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

27 Si on note C_2 la fonction $x \longmapsto 2x^2-1$ et S_2 la fonction $x \longmapsto 2x$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\cos(2\theta) = C_2(\cos\theta) \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = S_2(\cos\theta)\,\sin\theta.$$
Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales C_n et S_n pour lesquelles $\cos(n\theta) = C_n(\cos\theta)$ et $\sin(n\theta) = S_n(\cos\theta)\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

28 Simplifier pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
1) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \cos(kx+y)$. **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(kx)$.

29 Écrire la somme $\displaystyle\sum_{k=-n}^n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}$ comme un quotient de sinus pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

30
1) Montrer que $|\sin x| \geqslant \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n |\sin k|$.

31 Montrer que pour tous $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sin(\omega k) = \frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}.$$

GÉOMÉTRIE

32 Représenter graphiquement les ensembles suivants dans lesquels $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont fixés :
1) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\right\}$.
2) $\left\{a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mid t \in [0,\pi]\right\}$. **3)** $\left\{a + \lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \lambda > 0\right\}$.
4) $\left\{a + \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mid \lambda \in [1,2],\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

5) $\left\{a+\lambda e^{it} \mid \lambda\in]0,1[, \quad t\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right[\right\}$.

6) $\left\{z\in\mathbb{C}^* \mid \arg(z)\equiv\theta\,[2\pi]\right\}$.

7) $\left\{z\in\mathbb{C}^* \mid 3\arg(z)\equiv\theta\,[2\pi]\right\}$.

33

1) Soient A, B et M trois points distincts d'affixes respectifs a, b et z. À quelle condition nécessaire et suffisante sur le rapport $\dfrac{z-b}{z-a}$:
   a) les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont-ils colinéaires de même sens ?
   b) les points A, B et M sont-ils alignés ?
   c) les droites (MA) et (MB) sont-elles orthogonales ?
2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :
   a) les points 1, z et z^2 sont-ils alignés ?
   b) le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est-il rectangle en z ?
   c) les vecteurs z et $\overline{z}$ sont-ils orthogonaux ?
   d) les points z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ sont-ils situés sur un même cercle de centre 0 ?
3) Soit $z\in\mathbb{C}^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

---

34 *Caractériser géométriquement* une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, c'est déterminer si c'est une translation, une symétrie, une rotation, une homothétie, plus généralement une similitude, et préciser ses invariants (vecteur, centre, rapport...).

1) Caractériser géométriquement :
   a) $z\longmapsto iz+1$. b) $z\longmapsto 3z-2$.
   c) $z\longmapsto z+3-5i$. d) $z\longmapsto(1+i)z+2-i$.
2) Déterminer une expression explicite de la rotation de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

35

1) Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.
2) Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une translation, soit une rotation.

---

36 On note I l'application $z\longmapsto\dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

1) Montrer que l'image par I d'un cercle de centre 0 est un cercle.
2) Vérifier que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:
$$|u+v|^2=|u|^2+2\operatorname{Re}\big(u\overline{v}\big)+|v|^2=|u|^2+2\operatorname{Re}\big(\overline{u}v\big)+|v|^2.$$
3) Montrer que l'image par I d'un cercle (inclus dans $\mathbb{C}^*$, donc éventuellement privé de 0) est soit une droite, soit un cercle.

---

37 On souhaite prouver par le calcul deux ou trois classiques de géométrie dont on ne sait plus trop pourquoi on les connaît. Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$ non alignés. On introduit trois formes trigonométriques :
$$\frac{c-a}{b-a}=A\,e^{i\alpha},\quad \frac{a-b}{c-b}=B\,e^{i\beta}\quad\text{et}\quad\frac{b-c}{a-c}=C\,e^{i\gamma}$$
avec $A,B,C>0$ et $\alpha,\beta,\gamma\in]-\pi,\pi[$ non nuls.

1) a) Calculer ABC ainsi que $\alpha+\beta+\gamma$ modulo 2π.
   b) Montrer les égalités :
$$A\cos\alpha+\frac{\cos\beta}{B}=1\quad\text{et}\quad A\sin\alpha-\frac{\sin\beta}{B}=0,$$
   ainsi que quatre égalités analogues faisant intervenir $A,B,C,\alpha,\beta,\gamma$.
   c) En déduire que α, β et γ ont même signe, puis que $\alpha+\beta+\gamma=\pm\pi$.
   On dit que le triangle abc (ou bca ou cab) est *direct* si α, β et γ sont positifs et *indirect* sinon.
2) a) Montrer que :
$$|a-b|=|b-c|=|c-a|\quad\Longleftrightarrow\quad\alpha=\beta=\gamma.$$
   Quand l'une de ces assertions est vraie, on dit que le triangle abc (ou bca ou cab) est *équilatéral*.
   b) En déduire que abc est équilatéral direct si et seulement si $c-a=e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a)$, puis interpréter géométriquement.
   c) En déduire que abc est équilatéral direct si et seulement si $a+bj+cj^2=0$.
   d) Montrer que abc est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

---

38 Soient $a,b,c\in\mathbb{U}$. Montrer que si $a+b+c=0$, le triangle de sommets a, b et c est équilatéral.

---

39 Déterminer $\left\{u_1+\ldots+u_n \mid u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{U}\right\}$ pour tout $n\geqslant 2$.

RACINES $n^{\text{ÈMES}}$

40 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue z :

1) a) $z^4=4+4i$. b) $(z-1)^3=8i$.
   c) $z^n+1=0$.
2) a) $z^8-3z^4+2=0$.
   b) $z^6-2z^3\cos\varphi+1=0$.
3) a) $z^n=\overline{z}$. b) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=1$.

41

1) Écrire sous la forme $a+bj$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ les quantités : a) j^2. b) j^4. c) $(1+j)^7$.
   d) $(2-j)(3+2j)$. e) $\dfrac{j^9}{1+j}$. f) $\dfrac{1}{1-j}$.
2) Simplifier le produit $(u+v)\big(u+jv\big)\big(u+j^2v\big)$ pour tous $u,v\in\mathbb{C}$.

3) Résoudre l'équation $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right)=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{j},\overline{\mathrm{j}}\}$.

---

42 Est-il vrai que $\mathbb{U}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$?

43

1) Soit $P=X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme avec $a,b,c\in\mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t\in\mathbb{C}$ a-t-on $P(X+t)=X^3+3pX+q$ avec $p,q\in\mathbb{C}$?

2) Soient $p\in\mathbb{C}^*$ et $q\in\mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R=X^3+3pX+q$, dite *méthode de Cardan*.
On note α et β les deux racines éventuellement égales du polynôme X^2+qX-p^3 et γ une racine cubique quelconque de α.
a) Que valent $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$?
b) Montrer que γ est non nul et que $\gamma-\dfrac{p}{\gamma}$ est une racine de R.

3) Mêmes notations, mais on suppose q non nul. Soient γ et γ' deux racines cubiques distinctes de α. On suppose que $\gamma-\dfrac{p}{\gamma}=\gamma'-\dfrac{p}{\gamma'}$.
a) Montrer que $\alpha^2=-p^3$, puis que $4p^3+q^2=0$.
b) Qu'a-t-on prouvé si $4p^3+q^2\neq 0$?

4) Calculer les racines du polynôme X^3+3X^2+6X+2.

---

44 Simplifier pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

1) $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}(1+\omega)^n$. **2)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|\omega-1|$.

---

45 Soient $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$. On note P la fonction polynomiale $z\longmapsto a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$.

1) Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:
$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_{n+1}}P(\omega)\,\omega^{-k}=(n+1)\,a_k.$$

2) Justifier l'existence du réel $\|P\|=\sup_{z\in\mathbb{U}}\left|P(z)\right|$, puis montrer que $|a_k|\leqslant\|P\|$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

---

46 Soit $n\in\mathbb{N}$ impair. On pose $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et :
$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\qquad(\textit{somme de Gauss}).$$

1) Montrer que $|S|^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{n-k-1}\omega^{p^2+2pk}$.

2) Montrer que la fonction $p\longmapsto\omega^{p^2+2pk}$ est n-périodique sur $\mathbb{Z}$ et en déduire que $|S|=\sqrt{n}$.

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2

47 Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

1) $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=6u_{n+1}-5u_n$.
2) $u_0=1$, $u_1=0$ et $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$.
3) $u_0=1$, $u_1=0$ et $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$.
4) $u_0=1$, $u_1=-1$ et $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{2}$.
5) $u_0=u_1=3$ et $u_{n+2}=3u_{n+1}-\dfrac{9u_n}{4}$.
6) $u_0=1$, $u_1=2$ et $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

---

48 On pose $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0=2$, $a_1=3$ et $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\lfloor x^n\rfloor$ et n ont la même parité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

49 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ pour lesquelles $f\circ f(x)=6x-f(x)$ pour tout $x\geqslant 0$.
