EN VRAC

1 Déterminer l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

---

2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Que vaut $P^{(n)}$?

---

3 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0 pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

---

4 Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

5 Résoudre les équations polynomiales suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$: **1)** $P'^2 = 4P$.
2) $P = P' P''$. **3)** $\left(X^2+1\right) P'' = 6P$.
4) a) $P(X+1) = P(X)$. **b)** $P(X+1) - P(X) = X$.
5) $(X+4) P(X) = X P(X+1)$.

---

6 On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme T_n est appelé le $n^{ème}$ *polynôme de Tchebychev*. Dans les questions qui suivent, les résultats sont exigés pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant, ainsi que le coefficient constant de T_{2n}.

2) a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation **a)** est vraie.
c) En dérivant deux fois la relation **a)**, montrer que $\left(X^2-1\right) T_n'' + X T_n' - n^2 T_n = 0$.

3) Déterminer une expression explicite de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en exploitant la formule de Moivre.

4) Désormais $n \geqslant 1$.
a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1,1]$.
b) En déduire que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.
c) Simplifier enfin le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

---

7 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
$$P(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(a + \lambda\, \mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t.$$

2) On suppose que la fonction $z \longmapsto \left|P(z)\right|$ *possède un maximum local en a* : $\exists\, r > 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$|z-a| < r \implies \left|P(z)\right| \leqslant \left|P(a)\right|.$$
Montrer que P est constant.

---

8 Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

DIVISION EUCLIDIENNE

9 Soient $a \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le polynôme $X^4 - X + a$ est-il divisible par $X^2 - aX + 1$?

---

10 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de :
1) $X^n (X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$.
2) X^n par $(X-1)^2(X+1)$.
3) X^{2n} par $\left(X^2+1\right)^2$.
4) $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par X^2+X+1.

---

11 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

2) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X-9$ et que son reste par $X-3$ vaut 7. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\left(X^2+4\right)(X-3)$.

---

12 Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geqslant 4$.

---

13 Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

RACINES, MULTIPLICITÉS ET FORMULE DE TAYLOR

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer la multiplicité de 1 dans :
$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

2) Montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

15

1) Montrer que X^2+X+1 divise $X^{311}+X^{82}+X^{15}$.

2) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $X^{2n}+X^n+1$ est divisible par X^2+X+1.

---

16 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^n \sin\theta - X \sin(n\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

---

17 Montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18
1) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $P(a) > 0$ et $P^{(k)}(a) \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que P n'a pas de racine dans $[a,+\infty[$.
2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels $P(2) = 2$, $P'(2) = 0$ et $P''(2) = 4$.

NOMBRE MAXIMAL DE RACINES

19 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $\lambda \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de points d'intersection de la courbe d'équation $y = P(x)$ et de la droite d'équation $y = \lambda$?

---

20 Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant les assertions suivantes ? On tâchera de proposer plusieurs arguments dans chaque cas.
1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lfloor x \rfloor$.
2) $\forall x \geqslant 0, \quad P(x) = \sqrt{x}$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sin x$.
4) $\forall x \in [0, 2\pi[, \quad P(x) = \sin x$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = e^x$.

---

21 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$:
1) $P(n) = n^2$. 2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

---

22 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.
1) On suppose que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.
2) On suppose que $P(k) = \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$. Calculer le coefficient dominant de P.

---

23 Déterminer les polynômes non nuls $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $A(xy) = B(x)C(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}$.

---

24 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P(0) = 1$ et $P\big(X^2+1\big) = P(X)^2 + 1$.

---

25 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ — à coefficients entiers, donc. Montrer que si P est non constant, l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $P(n) \notin \mathbb{P}$ est infini.

POLYNÔMES SCINDÉS

26 Calculer la forme scindée sur $\mathbb{C}$ des polynômes suivants : 1) $X^4 - 16$. 2) $X^3 - i$. 3) $X^n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

---

27 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, il l'est aussi par $X^n - 1$.

---

28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Montrer que $a^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a - e^{\frac{2ik\pi}{n}} b\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
2) En déduire que $A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(A - e^{\frac{2ik\pi}{n}} B\right)$ pour tous $A, B \in \mathbb{C}[X]$.

---

29 Soient $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
1) Simplifier $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, puis en déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
2) a) Écrire les racines du polynôme $(X+1)^n - e^{2in\theta}$ sous la forme $2u \sin\varphi$ avec $u \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
b) En déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

30
1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On suppose que :
$$P\big(X^2\big) = P(X)\,P(X-1)$$
et on note $\mathscr{R}$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer que $\mathscr{R}$ est stable par $z \longmapsto z^2$ et en déduire que $\mathscr{R} \subset \mathbb{U}$.
b) Montrer que $1 + \mathscr{R} \subset \mathbb{U}$.
c) En déduire $\mathscr{R}$, puis P.
2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P\big(X^2\big) = P(X)\,P(X-1)$.

---

31 Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer qu'alors $\big(X^p - 1\big)\big(X^q - 1\big)$ divise $(X-1)\big(X^{pq} - 1\big)$.

RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES

32 Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :
1) $x^2 + y^2 + z^2$. 2) $x^3 + y^3 + z^3$.
Et si x, y et z sont non nuls :

3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$. 4) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$.

---

33 Soient $p,q\in\mathbb{C}$. On pose $P=X^3+pX+q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

1) Montrer que $P'(x)\,P'(y)\,P'(z)=4p^3+27q^2$ au moyen des relations coefficients-racines.
2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

34

1) On note $\bigstar$ le système $\begin{cases} x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=19\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1\end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^3$. Soit $(x,y,z)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^3$. On pose $P=(X-x)(X-y)(X-z)$.
   a) Si (x,y,z) est solution d'$\bigstar$, déterminer P explicitement.
   b) Résoudre $\bigstar$.
2) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:
   a) $\begin{cases} x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\\ xyz=-2.\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=0\\ x^3+y^3+z^3=3.\end{cases}$

---

35 Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2. Montrer que la moyenne des racines de P' comptées avec multiplicité est la même que la moyenne des racines de P.

Polynômes annulateurs d'une matrice carrée

36 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}_{[n]}$ est inversible pour $n\geqslant 2$ et calculer son inverse en exhibant d'abord un polynôme annulateur.

---

37 Calculer les puissances des matrices suivantes en exhibant d'abord pour chacune un polynôme annulateur :

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ (degré 2).
2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ (degré 2).
3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (degré 3).

Interpolation de Lagrange

38 Soient $n\geqslant 2$, $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$ distincts et $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les polynômes $L_1+\ldots+L_n$ et $x_1L_1+\ldots+x_nL_n$.

---

39 On note $L_0,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange de $0,\dots,n$.

1) Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
2) Exprimer de deux manières différentes l'unique polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n pour lequel $P(k)=k^n$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
3) En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

---

40 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ pour lesquels pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$:
$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n\lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

41

1) Déterminer l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ pour lesquels $P(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$.
2) Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ pour lesquels $P(K)\subset K$.

Promenade dans $\mathbb{F}_p[X]$

42 Soit $p\in\mathbb{P}$.

1) Montrer que pour tous $A,B\in\mathbb{F}_p[X]$:
$$(A+B)^p=A^p+B^p \qquad\text{et}\qquad A(X)^p=A\left(X^p\right).$$
2) Montrer que pour tout $P\in\mathbb{F}_p[X]$ de degré premier à p : $\deg(P')=\deg(P)-1$.
3) Montrer que pour tous $P,Q\in\mathbb{F}_p[X]$, les fonctions polynomiales $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ coïncident sur $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $P-Q$ est divisible par X^p-X.

---

43 Soit $p\in\mathbb{P}$ impair.

1) Montrer que $\mathbb{F}_p$ contient exactement $\dfrac{p-1}{2}$ carrés non nuls.
2) Montrer que le polynôme $X^{p-1}-\overline{1}$ est scindé sur $\mathbb{F}_p$ et expliciter sa forme scindée.
3) En déduire que $x^{\frac{p-1}{2}}\in\left\{-\overline{1},\overline{1}\right\}$ pour tout $x\in\mathbb{F}_p^*$ et que x est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}}=\overline{1}$.
4) Que dire du produit de deux non-carrés de $\mathbb{F}_p^*$?
