Ce ne sera jamais précisé,
mais dans chacun des exercices ci-dessous,
les variables aléatoires manipulées sont définies
sur un même espace probabilisé fini.

MODÉLISATION PROBABILISTE

1 On tire une boule dans une urne qui contient pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$ exactement k boules de même numéro k. On note N le numéro de la boule tirée.

1) Déterminer la loi et l'espérance de N.
2) Avec quelle probabilité N dépasse-t-il strictement n ? Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?
3) Avec quelle probabilité N est-il pair ? Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?

---

2 Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ?

---

3 On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

---

4 Un industriel reçoit d'un fournisseur un lot de n produits de numéros de série $1, 2, \ldots, n$. Il contrôle leur bon fonctionnement en les passant en revue les uns après les autres au hasard et sans remise. On note D le numéro de série du dernier produit contrôlé. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D.

---

5 Il a été constaté empiriquement qu'un certain fleuve déborde de son lit en moyenne une fois tous les 100 ans à raison d'une crue par an au plus. Montrer que la probabilité de n'observer aucune crue de ce fleuve sur une période de 100 ans est proche de e^{-1}.

---

6 On tire simultanément k boules d'une urne en contenant n numérotées de 1 à n et on note M le plus grand numéro tiré.

1) Déterminer la loi de M.
2) **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
b) En déduire une expression simple de $\mathrm{E}(M)$.

7

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note n la plus grande valeur de X. Montrer que :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$
2) On lance n fois un dé équilibré à 6 faces et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le numéro de la face obtenue au $i^{\text{ème}}$ lancer.
On pose en outre $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.
b) En déduire l'espérance de M_n, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
c) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathrm{E}(M_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$. À partir de quel entier n l'espérance de M_n dépasse-t-elle 5 ? On pourra utiliser une calculatrice.

---

8 Un joueur dispose de n fléchettes pour éclater un ballon et sa probabilité p de succès à chaque tir appartient à $]0, 1[$. Le joueur arrête ses lancers dès que le ballon éclate et on note N le nombre de fléchettes qu'il a utilisées, que le ballon ait éclaté ou non.

1) Déterminer la loi de N.
2) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si le ballon a éclaté, avec quelle probabilité a-t-il éclaté avec la $k^{\text{ème}}$ fléchette ?
3) Calculer l'espérance de N. Quelle limite lorsque n tend vers $+\infty$?

---

9 Un sac contient $n-2$ boules blanches et 2 boules vertes. On le vide progressivement au hasard, boule après boule. On note V_1 le rang d'apparition de la première boule bleue et V_2 celui de la deuxième.

1) Déterminer la loi et l'espérance de V_1.
2) **a)** Déterminer la loi conditionnelle de V_2 sachant $\{V_1 = i\}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.
b) En déduire la loi et l'espérance de V_2.

---

10 Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$.

1) On note F le nombre de points fixes de σ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$.
a) Calculer $P(E_i)$ et $P(E_i \cap E_j)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
b) Exprimer F en fonction des événements $E_1, \ldots, E_n$. En déduire l'espérance de F.
c) Calculer $\mathrm{cov}\big(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j}\big)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, puis en déduire la variance de F.
d) Montrer que $P(F \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

2) On note L la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

3) Dans cette question, n n'est plus fixé et on se donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une permutation aléatoire σ_n de $[\![1, n]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors N_n le nombre de cycles de la décomposition de σ_n en produit de cycles disjoints et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ dont la décomposition en produit de cycles disjoints contient exactement k cycles.
a) Montrer que $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + n c_{n,k}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
b) En déduire une expression de $\mathrm{E}(N_{n+1})$ en fonction $\mathrm{E}(N_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

MANIPULATION FORMELLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

11 ◷ Soient A et B deux événements pour lesquels : $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de $\mathbb{1}_A+2\mathbb{1}_B$.

---

12 ◷ Soient $m,n\in\mathbb{Z}$ deux entiers pour lesquels $m\leqslant n$ et U une variable uniforme sur $[\![m,n]\!]$.

1) Calculer la variance de U dans le cas où $m=1$.

2) En déduire la variance de U dans le cas général.

---

13 ◷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que les variables aléatoires $S=X+Y$ et $D=X-Y$ ne sont pas indépendantes, mais que pourtant $\mathrm{E}(SD)=\mathrm{E}(S)\mathrm{E}(D)$.

---

14 ◷◷ Soient U et V deux variables indépendantes uniformes sur $[\![1,n]\!]$. On note I leur minimum et S leur maximum.

1) a) Déterminer la loi de I.

b) En déduire l'espérance de I.

2) Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

3) Calculer l'espérance de S sans déterminer sa loi.

4) Déterminer la loi du couple (I,S).

---

15 ◷◷ Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables indépendantes uniformes sur $[\![1,p]\!]$. On pose :

$$N=\left|\left\{i\in[\![1,n-1]\!]\ \middle|\ X_{i+1}\geqslant X_i\right\}\right|.$$

Calculer $P(X_{i+1}\geqslant X_i)$ pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, puis l'espérance de N.

---

16 ◷◷◷ Soit $M=(R_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables indépendantes de Rademacher. On pose $D=\det(M)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de D.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|D|\geqslant\sqrt{(n+1)!}\right)$.

17

1) ◷◷ Soient X et Y deux variables aléatoires complexes définies sur un même espace probabilisé fini (Ω,P). On suppose que $P(Y=y)>0$ pour tout $y\in Y(\Omega)$. On appelle alors *espérance conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$*, notée $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$, l'espérance de X pour la probabilité $P_{\{Y=y\}}$.

a) Que vaut $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$ pour tout $y\in Y(\Omega)$ si X et Y sont indépendantes ?

b) Montrer que $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)P(Y=y)$.

Cette formule reste vraie si $P(Y=y)=0$ pour certains $y\in Y(\Omega)$. Le réel $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$ n'est pas défini dans ce cas, mais on peut considérer par convention que $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)P(Y=y)=0$.

2) ◷◷◷ Soient $X_1,\ldots,X_n$ et T des variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose T à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et $X_1,\ldots,X_n$ de même loi.
On pose $S_T=X_1+\ldots+X_T$.

a) Montrer que pour toute fonction $f:S_T(\Omega)\longrightarrow\mathbb{C}$ et pour tout $t\in[\![1,n]\!]$:

$\mathrm{E}_{\{T=t\}}\big(f(S_T)\big)P(T=t)=\mathrm{E}_{\{T=t\}}\big(f(S_t)\big)P(T=t)$.

En dépit des apparences, ce n'est pas évident.

b) Montrer que $\mathrm{E}(S_T)=\mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.

c) On suppose à présent que $X_1,\ldots,X_n$ sont centrées. Montrer que $\mathrm{V}(S_T)=\mathrm{E}(T)\mathrm{V}(X_1)$.

---

18 ◷◷◷ Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires réelles deux à deux décorrélées, d'écarts-types strictement positifs et définies sur un espace probabilisé fini (Ω,P). On pose $X_0=1$.

1) Simplifier $\mathrm{V}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_kX_k\right)$ pour tous $\lambda_0,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$.

2) En déduire que la famille $(X_0,\ldots,X_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^\Omega$, puis que $|\Omega|\geqslant n+1$.

INÉGALITÉS PROBABILISTES

19 ◷ Soit X une variable aléatoire réelle. Pour quel(s) réel(s) x la quantité $\sqrt{\mathrm{E}\big((X-x)^2\big)}$ est-elle minimale ?

---

20 ◷ Soient a et b deux réels pour lesquels $a\leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.

1) a) Montrer que $\mathrm{V}(X)\leqslant\big(b-\mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X)-a\big)$ en factorisant $\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}\big((b-X)(X-a)\big)$.

b) En déduire que $\mathrm{V}(X)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$.

2) Calculer la variance de $(b-a)X+a$ dans le cas où X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Qu'en déduit-on ?

---

21 ◷◷ Soient a et b deux réels pour lesquels $0<a\leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.

1) Montrer que $\frac{1}{X}\leqslant\frac{a+b-X}{ab}$.

2) En déduire que $\mathrm{E}(X)\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}$.

---

22 ◷◷ Soient X une variable aléatoire positive, $a>0$ et $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante.

Montrer que $P(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathrm{E}\big(f(X)\big)}{f(a)}$.

23 Soit X une variable aléatoire réelle centrée. Montrer que $\mathrm{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

24

1) Soient I un intervalle, X une variable aléatoire à valeurs dans I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

a) Montrer que $\mathrm{E}(X) \in I$.

b) Montrer l'*inégalité de Jensen* : $\mathrm{E}(f(X)) \leqslant f(\mathrm{E}(X))$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives de même loi. Montrer que $\mathrm{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

---

25 Soient X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1) Montrer que $P\big(X - \mathrm{E}(X) \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{t^2 + \mathrm{V}(X)}{(t+a)^2}$ pour tout $t \geqslant 0$.

2) En déduire l'*inégalité de Cantelli* :
$$P\big(X - \mathrm{E}(X) \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X) + a^2}.$$

3) Montrer que $P\Big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant a\Big) \leqslant \dfrac{2\,\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X) + a^2}$, puis comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

26 Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1, 1]$ d'écart-type σ.

1) Montrer que $P(X \geqslant \alpha) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ pour tous $t \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$.

2) **a)** Déterminer le minimum sur $[-1, 1]$ de la fonction $u \longmapsto \big(1 + u + u^2\big)\mathrm{e}^{-u}$.

b) En déduire que $\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant 1 + \sigma^2 t^2 \leqslant \mathrm{e}^{\sigma^2 t^2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3) En déduire que $P(X \geqslant \lambda\sigma) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}$, puis que que $P\big(|X| \geqslant \lambda\sigma\big) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ pour tout $\lambda \in [0, 2\sigma]$.

27

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\operatorname{ch} x \leqslant 1$.

2) **a)** Montrer par un argument de convexité que pour tous $x \in [-1, 1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x \operatorname{sh}\lambda$.

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1, 1]$. Montrer que :
$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\lambda X}\big) \leqslant \operatorname{ch}\lambda.$$

3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, centrées et bornées par 1 en valeur absolue. On pose $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\lambda M}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n}}, \quad \text{puis que } \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\lambda |M|}\big) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n}}.$$

b) En déduire que pour tous $\lambda \geqslant 0$ et $t > 0$:
$$P\left(|M| \geqslant \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda t}{\sqrt{n}}}.$$

c) En déduire que pour tout $t > 0$:
$$P\left(|M| \geqslant \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4) Soient $a > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, d'espérance commune m et pour lesquelles $|X_i - m| \leqslant a$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On pose $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que pour tout $t > 0$ (*inégalité de Hoeffding*) :
$$P\left(|M - m| \geqslant \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}.$$

---

28 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées indépendantes.
On pose $\sigma_k = \sigma(X_k)$ et $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, puis $\sigma = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$. Soit $x > 0$.

1) Montrer que $P\big(|S_k| \geqslant x\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{x^2}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

On pose $A_k = \big\{|S_k| \geqslant x\big\} \cap \displaystyle\bigcap_{1 \leqslant i < k} \big\{|S_i| < x\big\}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) Exprimer l'événement $\Big\{\max\big\{|S_1|, \ldots, |S_n|\big\} \geqslant x\Big\}$ en fonction de $A_1, \ldots, A_n$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\big) \leqslant \sigma^2$.

4) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_k^2\big) \leqslant \mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\big).$$

5) En déduire l'*inégalité maximale de Kolmogorov* :
$$P\Big(\max\big\{|S_1|, \ldots, |S_n|\big\} \geqslant x\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

29

1) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes indépendantes de même loi. Montrer que :
$$\big|\mathrm{E}(Z_1)\big|^2 = \mathrm{E}\big(Z_1\overline{Z_2}\big).$$

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans un intervalle de longueur t inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $\big|\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\big)\big|^2 = \mathrm{E}\big(\cos(X - Y)\big)$.

b) Montrer que $|\cos x| \geqslant \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire que $\big|\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\big)\big| \geqslant \max\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos t\right\}$.

3) **a)** Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $|\theta_i - \theta_j| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right| \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

b) Représenter graphiquement la situation de la question **a)**. Intuitivement, comment convient-il de choisir les réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ si on veut minimiser la quantité $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right|$?

4) Trouver un exemple de variable aléatoire X pour laquelle $\big|\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\big)\big| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
