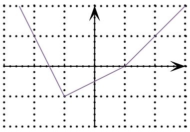
VOCABULAIRE USUEL

1
1) Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :
   a) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2.
   b) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1,2)$ et $(2,1)$.
2) a) Tracer le graphe de $x \longmapsto 2|x-1|-|x+1|$.
   b) Déterminer une expression par morceaux de la fonction représentée ci-contre.



---

2 Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions : 1) $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.
2) $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}$. 3) $x \longmapsto 1+\ln(2-x)$.

---

3 On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.
1) Tracer rapidement l'allure du graphe de f.
2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0,2]$ et $[-2,2]$ sont stables par f.

4
1) a) La fonction $x \longmapsto x\,e^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
   b) Déterminer son image.
2) Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}$ est bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

---

5 Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser) :
1) grâce au TVI strictement monotone.
2) en calculant sa réciproque.

6
1) Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?
2) Montrer que :
   a) la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut ne pas être monotone.
   b) la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée). Et le produit ?

---

7 Soient $T>0$ et $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que $f^{-1}(B)$ est T-périodique pour toute partie B de $\mathbb{R}$.

---

8 Soit $\omega \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \cos x+\cos(\omega x)$ est périodique si et seulement si $\omega \in \mathbb{Q}$.
2) Même question avec $x \longmapsto \sin x+\sin(\omega x)$.

---

9 Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité des fonctions :
1) $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$. 2) $x \longmapsto \sqrt{e^x+2e^{-x}-3}$.
3) $x \longmapsto \sqrt{2-|x-3|}$. 4) $x \longmapsto \dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

---

10 Calculer les dérivées successives de :
1) a) $x \longmapsto a^x$ $(a>0)$.
   b) $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. c) cos et sin.
2) a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$.
   b) $x \longmapsto \ln(3-2x)$. c) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

11
1) Étudier la parité/imparité, les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$.
2) Même question avec $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$, mais sans la convexité/concavité.

---

12 Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales : 1) $x \longmapsto x^5-x^3+1$.
2) $x \longmapsto 4x^3-18x^2+24x-9$.

---

13 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes pour lesquelles $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

14
1) Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonction $x \longmapsto x^x$.
2) Combien l'équation $y=x^x$ d'inconnue $x>0$ possède-t-elle de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$?

15
1) Résoudre l'équation $2^x+3^x=5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $x\ln x=1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
3) Montrer que l'équation $e^{-x^2}=e^x-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
4) Combien la fonction $x \longmapsto 1+\dfrac{x}{\ln x}$ possède-t-elle de points fixes ?

5) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

16

1) Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$ et $x>-1$.
2) En déduire que pour tous $\alpha\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\geqslant(n+1)^\alpha.$$

---

17 Montrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

18

1) Montrer que $\ln(1+x)\geqslant x-\dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x\geqslant 0$.
2) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

19

1) Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. En moyenne, de quel pourcentage a-t-il augmenté chaque année sur cette période ?
2) Soient $x_1,\dots,x_n>0$. On pose :

$$a=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\qquad\text{et}\qquad g=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.$$

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(\frac{x_k}{a}-1\right)$ et en déduire que $g\leqslant m$ (*inégalité arithmético-géométrique*).

---

20 Montrer que :

1) pour tout $x\leqslant 1$: $\quad e^x\leqslant 1+x+\dfrac{ex^2}{2}$.
2) pour tout $x\in]0,1[$: $\quad x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$.
3) pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\quad\dfrac{e^x-1}{x}\geqslant x+e-2$.
4) pour tout $x>0$:

$$x\ln x-(x-1)\geqslant\frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

21

1) Étudier sur $[1,+\infty[$:
   a) le signe de $x\longmapsto(x-1)\ln(1+x)-x\ln x$.
   b) les variations de $x\overset{\varphi}{\longmapsto}\ln(1+x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
2) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.
3) En déduire que pour tous $a,b>0$:

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2.$$

---

22 Soit $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$ et on note f la fonction $x\longmapsto\ln\dfrac{1+qx}{1-px}$.

1) Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
2) Montrer que pour tout x bien choisi :

$$f\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-x\right)=2\ln\frac{q}{p}-f(x).$$

Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

---

23 Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ une fonction pour laquelle $f\,e^f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Étudier les variations de f.

---

24 Montrer que $e^x\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

25

1) Montrer que $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, puis en déduire une relation analogue sur $\mathrm{sh}(x+y)$. Exprimer enfin $\mathrm{th}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{th}\,x$ et $\mathrm{th}\,y$.
2) Que vaut $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{th}\,u}{u}$? En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x}{\mathrm{th}\,x}$.

---

26 Montrer que :

1) pour tout $x\geqslant 0$: $\quad\mathrm{sh}\,x\geqslant x\quad$ et $\quad\mathrm{ch}\,x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.
2) pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad|\mathrm{th}\,x|\geqslant\dfrac{|x|}{1+|x|}$.

27

1) Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2) Même question avec th de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
3) Même question avec ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

---

28 Montrer sans récurrence que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^n\mathrm{ch}(2kx)=\frac{\mathrm{sh}\big((n+1)x\big)}{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}(nx)$.

CALCULS DE LIMITES

29

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x^2+1}$. b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}(2x)}}$.
   c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta+1}\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x^\alpha}-\sqrt{x^2+1}\right)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

2) a) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{x^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$. **b)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)}{e^{2x}+x-1}$.
c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*,\ \beta\in\mathbb{R})$.

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\operatorname{sh}(3x)}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\operatorname{sh}(3x)}$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.
c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

COSINUS, SINUS ET TANGENTE

30

1) Calculer $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et montrer que $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

2) Calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$, puis $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3) Déduire du résultat de la question **1)** qu'étant donnés 13 réels distincts, on peut toujours en trouver deux x et y pour lesquels :

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<2-\sqrt{3}.$$

---

31 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue x : **1)** $\cos x\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **2)** $\sin x>-\dfrac{1}{2}$.
3) $|\tan x|\leqslant1$. **4)** $\ln\tan\dfrac{\pi x}{2}>0$.

---

32 Montrer que $\left|\sin(nx)\right|\leqslant n\,|\sin x|$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

---

33 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :
1) $\cos(3x)=\sin x$. **2)** $\cos x+\sin x=1+\tan x$.
3) $\sin x+\sin(2x)=0$. **4)** $\tan(2x)=3\tan x$.
5) $2\sin x+\sin(3x)=0$. **6)** $3\tan x=2\cos x$.
7) $\cos x=\sqrt{3}\sin x$. **8)** $2\cos(4x)+\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

---

34 Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

35 Montrer que pour tout $n\geqslant2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\qquad(n-1\text{ symboles }\sqrt{\cdot}).$$

36

1) Montrer que $\tan x>x$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que la fonction $x\longmapsto\dfrac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

---

37 Montrer que $\sin x\geqslant\dfrac{x(\pi-x)}{\pi}$ pour tout $x\in[0,\pi]$ en travaillant sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans un premier temps et en concluant sans nouvelle étude de fonction.

---

38 Soient $c,s\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que :
$c'=-s,\quad s'=c,\quad c(0)=1\quad$ et $\quad s(0)=0$.

1) On fixe $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer, grâce à la fonction :
$$t\longmapsto s(t+x)c(t+y)-c(t+x)s(t+y),$$
que $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$.

2) En déduire que s est impaire et c paire.

3) En déduire que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y).$$

4) En déduire que $c^2+s^2=1$.

---

39 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f''+f\geqslant0$. Montrer, grâce à la fonction $t\longmapsto f'(t)\sin(t-x)-f(t)\cos(t-x)$, que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad f(x)+f(x+\pi)\geqslant0$.

40

1) a) Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ pour tous $x\in\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$:
$$\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}.$$

2) Déduire du résultat de la question **1)a)** que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de la fonction $x\longmapsto\ln\cos x$.

---

41 On pose $P_n(x)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\sin\left(2^kx\right)$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

1) Exprimer $P_1(x)$ en fonction de $\cos x$, puis montrer que $\left|P_1(x)\right|\leqslant\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\left|\sin^2x\sin(2x)\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) a) Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$:
$$P_{n+1}(x)^2=\sin^2x\sin(2x)P_{n-1}(4x)P_n(2x).$$

b) En déduire que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$:
$$\left|P_n(x)\right|\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

ARCMACHINS

42
1) Résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre le système $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $\sin x = \frac{4}{5}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

43
1) Simplifier : a) $\operatorname{Arccos}\cos\frac{8\pi}{3}$. b) $\operatorname{Arcsin}\sin\frac{17\pi}{6}$. c) $\operatorname{Arctan}\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$. d) $\operatorname{Arcsin}\cos\frac{7\pi}{4}$. e) $\operatorname{Arccos}\sin\frac{17\pi}{5}$.
2) Tracer le graphe des fonctions :
a) $\operatorname{Arctan}\circ\tan$. b) $\operatorname{Arccos}\circ\cos$.
c) $\operatorname{Arcsin}\circ\sin$.

44 Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonction $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x-1}$.

45
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos\operatorname{Arctan}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad\text{et}\quad \sin\operatorname{Arctan}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
2) Simplifier de même les expressions suivantes :
a) $\sin\left(2\operatorname{Arccos}x\right)$. b) $\sin\left(2\operatorname{Arctan}x\right)$.
c) $\tan\left(\operatorname{Arccos}x\right)$. d) $\cos\left(3\operatorname{Arccos}x\right)$.

46 Simplifier par une technique de dérivation les expressions suivantes :
1) $\operatorname{Arctan}\frac{1+x}{1-x}$. 2) $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.
3) $\operatorname{Arccos}\operatorname{th}x + 2\operatorname{Arctan}e^x$. 4) $\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
5) $\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 6) $\operatorname{Arctan}e^x - \operatorname{Arctan}\operatorname{th}\frac{x}{2}$.
7) $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x^2} + \operatorname{Arctan}\frac{x-1}{x} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{x+1}$.

47
1) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$.
2) Montrer que $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$.
3) Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.
4) Montrer la *formule de Machin* :
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}.$$

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π car on sait approximer facilement les arctangentes comme nous le verrons plus tard. Le résultat de la question **1)** est appelé quant à lui une *formule du type de Machin*. Il en existe d'autres, par exemple :
$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}.$$

48
1) Simplifier $\operatorname{Arctan}\operatorname{sh}x + \operatorname{Arccos}\operatorname{th}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $\operatorname{th}x = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3) En déduire que $\operatorname{Arctan}\frac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

49 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $xy \neq 1$. Montrer que :
$$\operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}y = \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$
pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ dépendant de x et y. Préciser la valeur de k en fonction de x et y et représenter graphiquement la région des couples (x,y) pour lesquels $k=0$ (resp. $k=1$, resp. $k=-1$).

50 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :
1) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}x$. 2) $\operatorname{Arcsin}\tan x = x$.
3) $\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin}x$.
4) $\operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$.
5) $\operatorname{Arcsin}(x+1) - \operatorname{Arcsin}x = \frac{\pi}{6}$.

51
1) Simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la limite $\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

52 On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$
3) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+1}}$.