RELATIONS D'ORDRE

1 Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on dit que $x \preccurlyeq y$ si $y = x^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

---

2 Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. Pour tous $x, y \in E$, on notera xy le couple (x, y) pour alléger.

1) Pour tous $xy, x'y' \in E^2$, on dit que $xy \preccurlyeq^\circ x'y'$ si $x \preccurlyeq x'$ et $y \preccurlyeq y'$.
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\circ$ est une relation d'ordre.
   b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^\circ$ n'est pas totale.
2) Pour tous $xy, x'y' \in E^2$, on dit que $xy \preccurlyeq^\star x'y'$ si $x \prec x'$ ou $\big(x = x'$ et $y \preccurlyeq y'\big)$.
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\star$ est une relation d'ordre.
   b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, $\preccurlyeq^\star$ l'est aussi.
3) La relation $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$, donc $\leqslant^\star$ l'est sur $\mathbb{R}^2$ d'après **2)b)**, donc $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme une sorte de droite. La voyez-vous, cette droite ?

---

3 Soit E un ensemble. On munit $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'inclusion $\subset$. On veut montrer que toute application croissante de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même possède un point fixe. Soit f une telle application :

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \quad X \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \subset f(Y).$$

On pose $\mathscr{A} = \big\{A \in \mathscr{P}(E) \mid \ X \subset f(X)\big\}$, puis M la réunion des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $M \subset f(M)$, puis que $f(M) = M$.

---

4 Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^n$, on pose :

$$A_X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \qquad \text{et} \qquad G_X = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.$$

Soit $m > 0$ fixé. On pose $\mathscr{M} = \Big\{X \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^n \mid \ A_X = m\Big\}$, et pour tout $X \in \mathscr{M}$, on note $\mu(X)$ le nombre d'apparitions de m dans X. Pour tous $X, Y \in \mathscr{M}$, on dit que $X \prec Y$ si $G_X < G_Y$.

1) La relation $\prec$ est-elle réflexive ? transitive ? antisymétrique ?
2) Soit $X \in \mathscr{M}$. On suppose $\mu(X) < n$.
   a) Montrer que pour certains $i, j \in [\![1, n]\!]$:
   $$x_i < m < x_j.$$
   b) Montrer que $x_i x_j < m(x_i + x_j - m)$.
   c) En déduire l'existence d'une famille $Y \in \mathscr{M}$ pour laquelle $X \prec Y$ et $\mu(X) < \mu(Y)$.
3) Montrer que $G_X \leqslant A_X$ pour tout $X \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^n$ (*inégalité arithmético-géométrique*) et étudier le cas d'égalité.

5

1) Soit E un ensemble, $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E.
   — On dit que A est *majorée* si :
   $$\exists M \in E, \quad \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq M.$$
   Le cas échéant, M est appelé UN *majorant de A*.
   — On appelle *plus grand élément de A* tout élément de A qui majore A.

   Montrer que si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique.

On définit de façon analogue les notions de *minorant* et *plus petit élément*.

2) On munit $\mathbb{N}$ de la relation de divisibilité $|$.
   a) L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est-il majoré ? Possède-t-il un plus grand élément ? Déterminer l'ensemble de ses minorants.

   Les ensembles suivants possèdent-ils un plus grand élément ? un plus petit élément ?

   b) $\mathbb{N}$. **c)** $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. **d)** $\{2^n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$.
3) Soit E un ensemble. On munit $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'inclusion $\subset$.
   a) $\mathscr{P}(E)$ possède-t-il un plus grand/petit élément ?
   b) À quelle condition nécessaire et suffisante l'ensemble $\big\{\{x\} \mid \ x \in E\big\}$ possède-t-il un plus grand élément ?

---

6 Soit E un ensemble.

1) Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. Pour tous $x, y \in E$, on dit que $x \mathscr{R}^{\mathrm{tr}} y$ si :
$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_0, \ldots, x_n \in E,$$
$$x = x_0 \quad \text{et} \quad \big(\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ x_k \mathscr{R} x_{k+1}\big) \quad \text{et} \quad x_n = y.$$
La relation $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ ainsi définie est appelée la *clôture transitive de* $\mathscr{R}$.
   a) Montrer que $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ est transitive.
   b) Montrer que si $\mathscr{R}$ est réflexive, $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.
   c) Montrer que si $\mathscr{R}$ est symétrique, $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.
2) On rappelle qu'une relation binaire sur E n'est jamais qu'une partie de $E \times E$.
   a) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $u, v \in E$ deux éléments pour lesquels $u \not\preccurlyeq v$ et $v \not\preccurlyeq u$. Montrer que $\big(\preccurlyeq \cup \{(u, v)\}\big)^{\mathrm{tr}}$ est une relation d'ordre sur E.
   b) En déduire que si E est fini, toute relation d'ordre sur E est incluse dans une relation d'ordre totale (*théorème d'extension de Spilrajn*).

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

7

1) Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour tous $x, x' \in E$, on dit que $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E et décrire la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x \in E$.
2) Dans cette question, $E = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}_+$ et f est la fonction $z \longmapsto |z|$. Déterminer un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.
3) Dans cette question, $E = \mathbb{R}_+^*$, $F = \mathbb{R}$ et f est la fonction $x \longmapsto x \ln x$. Calculer le cardinal de la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4) Soient A un ensemble et $B \in \mathscr{P}(A)$. Dans cette question, $E = F = \mathscr{P}(A)$ et f est l'application $X \longmapsto X \cap B$. Montrer que $\mathscr{P}(B)$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.

5) On revient au cas général de la question **1)** et on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x \in E$. On veut définir une application $\overline{f} : E/_{\equiv} \longrightarrow F$ en posant $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ pour tout $x \in E$, mais cette définition pose a priori problème. Quel problème ? Montrer que le problème n'en est pas un, puis que $\overline{f}$ est injective.

APPLICATIONS INCARNÉES

8 On note f l'application $n \longmapsto n+1$ sur $\mathbb{N}$ et g l'application $n \longmapsto \max\{0, n-1\}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, mais que f et g ne sont pas bijectives de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que faut-il en retenir ?

9 Proposer une bijection de $[-1,1]$ sur $[a,b]$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a < b$.

10 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) **a)** $(x,y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
b) $(x,y) \longmapsto (1, x-y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
c) $(x,y) \longmapsto (2x+y, 3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
d) $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x-y-z, x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

2) **a)** $x \longmapsto x^2+1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) $z \longmapsto z^2+1$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

3) $(a,b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

4) $f \longmapsto f(1) - f(0)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.

11 On note f la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{-1}(A) = \big(A \cap [0,1[\big) + \mathbb{Z}$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$.

12

1) On note f la fonction $x \longmapsto \sin \dfrac{\pi}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f\big(]0,1]\big)$ et $f^{-1}\big(\{0\}\big)$.

2) Déterminer l'image réciproque de $[-1,2]$ par la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

3) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. Déterminer l'image de f et $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4}, 1\right]\right)$.

13

1) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{2x+3y}{x+y}$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
a) f est-elle injective ?
b) Déterminer son image.

2) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \big(2x+y, x^2+y\big)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
a) f est-elle injective ?
b) Montrer que $f|_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}}$ est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur son image (à préciser).

14 Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles $f(n) + f \circ f(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16

1) Proposer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

2) En exploitant le théorème de factorisation première, proposer une injection de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que l'application :
$$(m,n) \longmapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$
est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

17

1) Montrer que l'application :
$$(A,B) \longmapsto (2A) \cup (2B+1)$$
est bijective de $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

2) On note φ l'application $X \longmapsto X \cap 2\mathbb{N}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
a) φ est-elle injective ?
b) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

3) Soient E un ensemble et A une partie de E. On note φ l'application $X \longmapsto X \cup A$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même.
a) φ est-elle injective ?
b) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

4) Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note f l'application $X \longmapsto \big(X \cap A, X \cap B\big)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrer que :
a) f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
b) f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

18 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B de E, on appelle *différence symétrique de A et B* la partie :
$$A \triangle B = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big) \quad \text{de } E.$$

1) Exprimer $\mathbb{1}_{A \triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

2) Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3) Montrer que $\triangle$ est *associative*, i.e. que pour tous $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$: $\quad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

APPLICATIONS DÉSINCARNÉES

19 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.

---

20 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

---

21 Soient E un ensemble et $f_1, \ldots, f_n$ des applications de E dans E. Montrer que si $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ est injective et $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ surjective, alors $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives.

---

22 Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) Soit A une partie de E. Vrai ou faux ? Justifier.
- **a)** Si f est injective, alors $f|_A$ l'est aussi. Et la réciproque ?
- **b)** Si f est surjective, alors $f|_A$ l'est aussi. Et la réciproque ?

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E de réunion E et croissante pour l'inclusion. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est aussi.

---

23 Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que $g = h \circ f$ pour une certaine application $h : F \longrightarrow G$ si et seulement si : $\forall x, x' \in E, \quad \big(f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x')\big)$.

---

24 Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

---

25 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1)
- **a)** Comparer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et A pour toute partie A de E. Commencer par un dessin.
- **b)** Montrer que si f est injective, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $\quad f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
- **c)** Montrer la réciproque.

2)
- **a)** Comparer $f\big(f^{-1}(B)\big)$ et B pour toute partie B de F. Commencer par un dessin.
- **b)** Montrer que si f est surjective, alors pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$: $\quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
- **c)** Montrer la réciproque.

On pourra retenir de cet exercice que si f est bijective, les applications $A \longmapsto f(A)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

---

26 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note δ l'application $A \longmapsto f(A)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et ρ l'application $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

1) f injective $\iff$ δ injective $\iff$ ρ surjective.

2) f surjective $\iff$ δ surjective $\iff$ ρ injective.
