MAXIMUM, BORNE SUPÉRIEURE

1 Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

---

2 Soit I un intervalle non vide.
1) Montrer que l'ensemble $f(I)$ possède une borne supérieure notée $\sup_I f$ pour toute fonction majorée $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
2) Comparer $\sup_I f + \sup_I g$ et $\sup_I (f+g)$ pour toutes fonctions f et g majorées sur I.

---

3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^\star(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x)$.
1) Illustrer cette définition de $f^\star$ sur différents exemples de fonctions f dessinées à main levée.
2) Déterminer $f^\star$ dans le cas où f est croissante.
3) Étudier la monotonie de $f^\star$.

4
1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
 a) Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'existence du réel :
$$d(x,A) = \inf\left\{|x-a| \quad \big| \quad a \in A\right\},$$
 appelé la *distance de x à A*.
 b) Calculer $d(x,A)$ pour tout $x \in A$.
2) Calculer $d(x,A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour :
$$A = [0,1[\quad \text{et} \quad A = [0,1] \cup [2,3].$$
3) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|$.
4) Calculer $d\big(x, \mathbb{Q} \cap [0,1[\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5
1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe. On pose $T = \left\{x \in [0,1] \mid \ f(x) \leqslant x\right\}$.
 a) Montrer que T possède une borne inférieure t.
 b) Montrer que $f(t)$ minore T.
 c) Montrer que T est stable par f.
 d) En déduire que $f(t) = t$.
2) Et si f est croissante de $[0,1[$ dans lui-même ?

---

6 Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière de x* tout entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n \leqslant x < n+1$. L'existence et l'unicité d'un tel entier ont été admises en cours, on les démontre ici.
1) Montrer l'unicité de la partie entière de x.
2) a) Montrer que si $x \geqslant 0$, $\left\{n \in \mathbb{Z} \mid \ n \leqslant x\right\}$ possède une borne supérieure, puis que celle-ci est un entier.
 b) En déduire l'existence de la partie entière de x.

---

7 Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes : 1) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \ \Big| \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2) $\left\{\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \ \Big| \ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3) $\left\{\frac{(-1)^k k}{k+1} \ \Big| \ k \in \mathbb{N}\right\}$. 4) $\left\{\frac{pq}{p^2+q^2} \ \Big| \ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
5) $\left\{\frac{1}{p-q} \ \Big| \ p,q \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ p \neq q\right\}$.

---

8 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que : $\sup\left\{|x-y| \ \big| \ x,y \in A\right\} = \sup A - \inf A$.

---

9 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose A et B *adjacentes*, i.e. que tout élément de A est inférieur à tout élément de B et que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a,b) \in A \times B, \quad b - a < \varepsilon.$$
Montrer que $\sup A = \inf B$ après avoir justifié l'existence de ces deux réels.

---

10 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. Montrer que si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{I \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})} \sum_{i\in I} a_i$ où $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

POT POURRI

11 Soient $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite des suites de terme général :
1) a) $\frac{\operatorname{sh} n}{\sqrt{\operatorname{ch}(2n)}}$. b) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.
 c) $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$. d) $\frac{1+2\sin n}{\sqrt{n}}$. e) $\frac{n!}{n^n}$.
2) a) $\frac{n^\alpha}{n^\beta+1}$. b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.
3) $\sqrt{e^n + x^n} - \sqrt{e^n+1}$.
4) a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.
 c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$. e) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

---

12 On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un réel $\alpha > 0$ pour lequel $H_{2n} - H_n \geqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis en déduire $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

---

13 Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer rapidement un rang — pas forcément le meilleur — à partir duquel :
1) $\frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$. 2) $\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-4} < \varepsilon$.
3) $\sqrt{n^2-n} > A$. 4) $3^n - 2^n > A$.

14 1) Montrer que tout suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.
2) Montrer que tout suite convergente d'entiers est stationnaire.

15 Que dire de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ pour lesquelles $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$?

16 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Montrer que :

$$\max\left\{u_n, u'_n\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max\left\{\ell, \ell'\right\}$$

en revenant à la définition de la limite. Une autre preuve en vue ?

17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Étudier, en fonction de ℓ, la nature de $\left(\lfloor u_n\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. On suppose $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Étudier, en fonction de ℓ, la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

19 Soit $\ell\in[0,+\infty]$. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ pour lesquelles $u_n^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si : 1) $\dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

21 Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de segments non vides, i.e. pour lesquels $I_{n+1}\subset I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un segment non vide (*théorème des segments emboîtés*).

22 Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour lesquelles $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

23 Soit $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ une fonction injective. Montrer que $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

24 Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{N}^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel. Montrer que $|p_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

25 1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que $\left\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ possède un plus petit élément ou un plus grand élément.
2) Proposer un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dont ni $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ni $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne sont valeurs d'adhérence.
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle majorée. Montrer que si $\left\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ ne possède pas de plus grand élément, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

26 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites pour lesquelles $u_0>0$ et $v_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite — que l'on précisera.

27 Soient $a,b>0$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0=a$ et $b_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite. Cette limite qu'on ne calculera pas est appelée la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*.

SUITES EXTRAITES

28 Montrer que la suite de terme général u_n n'a pas de limite dans les deux cas suivants :
1) u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n pour tout $n\geqslant 2$.
2) $u_n=\sin\dfrac{n^2\pi}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

29 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :
1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

30 On admet que π est irrationnel. Le réel $\tan n$ est alors bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la suite $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

31 Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Montrer qu'aucune des deux suites $\left(\cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a de limite.

32 Montrer que $[-1,1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(\ln n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

SUITES ADJACENTES

33 Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes sont adjacentes :

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

2) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.

3) $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$ $(x \in \mathbb{R})$.

34 On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

On admet que leur limite commune est la constante e.

2) Montrer que $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{n.n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que e est irrationnel.

35

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*).

2) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

SUITES RÉCURRENTES

36 Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

2) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n}{2}$.

3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n^2$.

37 Dans chacune des situations suivantes, étudier les variations de la fonction sous-jacente ou la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$, déterminer quelques domaines stables intéressants, puis étudier en fonction de u_0 la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1)
a) $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$. **b)** $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
c) $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$. **d)** $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.

2) $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.

38 On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ sur $]-\infty,2]$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 peut-on définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$? On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.

2) **a)** Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f\circ f$.

b) Montrer que les points fixes de $f\circ f$ sont racines d'un polynôme de degré 4 dont -2 est racine, puis les déterminer.

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

39 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n}\right)$, puis en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ grâce au théorème de Cesàro.

40 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \geqslant 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n}{\lfloor u_n \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier la bonne définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ grâce au théorème de Cesàro.

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

41

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante. On suppose que $f(a) \leqslant 0$ et $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in [a,b[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2) Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
— l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ possède une et une seule solution x_n,
— la fonction f_n est strictement croissante sur I,
— pour tout $x \in I$: $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

42

1) Montrer que l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

43

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution x_n.
2) Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. On pourra observer que $e^x \leqslant e^x + x \leqslant 2\,e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

44

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

45

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation :
$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution x_n.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

46

1) a) Montrer que l'équation $\ln x = -nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) a) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et simplifier $nx_n + \ln(nx_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

CESÀRO ET SES ALENTOURS

47

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si :
$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$
alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0, +\infty]$, alors :
$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$
3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

---

48 Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive pour laquelle $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$:
$$\frac{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

---

49 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que :
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab.$$
