SUITES COMPLEXES

1

1) a) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n\,e^{i\theta_n}$.

b) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:
$$|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}\,|x|.$$

b) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite 1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n)$.

3) a) On pose $z_n = e^{i\pi + \frac{(-1)^n i\pi}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n)$.

b) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente dont la limite n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n)$.

---

2 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif.

---

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $m_n = \max\left\{|u_n|, |u_{n+1}|\right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $m_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) m_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que $m_n \leqslant e^2\, m_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) Déterminer un réel $a \geqslant 0$ pour lequel pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n$: $\quad |u_n - u_p| \leqslant \frac{a}{2^n}$.

4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

VALEURS D'ADHÉRENCE

4 Proposer un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dont ni $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ni $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne sont valeurs d'adhérence.

---

5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée pour laquelle $3u_n + u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

1) Que vaut la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle converge ?

2) Soit ℓ_0 une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne une fonction d'extraction φ pour laquelle $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_0$.

a) Montrer que la suite $\left(u_{2^k\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une expression explicite de ℓ_k en fonction de k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $\ell_0 = \frac{1}{4}$.

3) Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé en montrant que son complémentaire est ouvert.

2) On pose $u_n = \sqrt{n} - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $u_{n^2b^2+2an} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{b}$ pour tous $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $a \leqslant b$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée pour laquelle $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle non vide.

OUVERTS, FERMÉS, COMPACTS

8 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

1) Montrer que $\left\{x + iy \;\middle|\; ax + by < c\right\}$ est ouvert.

2) Montrer que $\left\{x + iy \;\middle|\; ax + by = c\right\}$ est fermé.

---

9 Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ?

1) Dans $\mathbb{R}$: **a)** $\mathbb{Z}$. **b)** $\mathbb{Q}$.

c) $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. **d)** $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$.

2) Dans $\mathbb{C}$: **a)** $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z| < 2\right\}$.

b) $\left\{x + iy \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R},\quad xy \neq 1\right\}$.

c) $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leqslant 1,\quad |z - 1| \leqslant 1\right\}$.

---

10 Soient $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$. On note C l'ensemble des *combinaisons convexes de* $z_1, \ldots, z_p$, i.e. des nombres complexes $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_p z_p$ avec $\begin{cases} \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in [0, 1] \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1. \end{cases}$
Montrer que C est compact.

---

11 Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{K}$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est un compact non vide (*théorème des compacts emboîtés*).

12

1) Soient A et B deux parties de $\mathbb{K}$.

a) Montrer que si A ou B est ouvert, $A + B$ l'est aussi.

b) Montrer que si A et B sont compacts, $A + B$ l'est aussi.

c) Montrer que si A est compact et B fermé, $A + B$ est fermé.

3) Représenter graphiquement $A + \mathbb{R}$ pour toute partie A de $\mathbb{C}$. En déduire une partie fermée A de $\mathbb{C}$ pour laquelle $A + \mathbb{R}$ n'est pas fermé.

13 Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ et $r, s \geqslant 0$:
$$\mathrm{B}(a,r) + \mathrm{B}(b,s) = \mathrm{B}(a+b, r+s).$$

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Montrer $\left\{u_n \mid \quad n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\ell\right\}$ est compact.

15 Montrer que $\varnothing$ et $\mathbb{K}$ sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{K}$.

16

1) Calculer :
   a) la frontière de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
   b) l'adhérence de $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \quad \mathrm{Re}(z) > 0\right\}$ dans $\mathbb{C}$.
2) Montrer que $\overline{A} = A \sqcup [-1,1]$ pour :
$$A = \left\{\sin\frac{1}{x} + \mathrm{i}x \mid \quad x > 0\right\}.$$
3) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$:
$$\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \overline{\mathrm{B}}(a,r) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\overline{\mathrm{B}}(a,r)} = \mathrm{B}(a,r).$$

17

1) Soient A et B deux parties de $\mathbb{K}$.
   a) Montrer que $\overline{\mathbb{K}\setminus A} = \mathbb{K}\setminus \overset{\circ}{A}$.
   b) Montrer que si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
   c) Montrer que $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.
   d) Montrer que $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$.
2) Proposer deux parties A et B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles $\overline{A\cap B} \neq \overline{A}\cap\overline{B}$.

18

1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{K}$.
   a) Justifier pour tout $x \in \mathbb{K}$ l'existence du réel $d(x,A) = \inf\left\{|x-a| \quad \mid \quad a \in A\right\}$.
   b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leqslant |x-y|.$$
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$:
$$x \in \overline{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x,A) = 0.$$
2) a) Soient A une partie de $\mathbb{K}$ et $r > 0$. Montrer que :
$$\bigcup_{a\in A} \mathrm{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{K} \mid \quad d(x,A) < r\right\}.$$
   b) Soit F un fermé de $\mathbb{K}$. Montrer que F l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts.
   c) Soit O un ouvert de $\mathbb{K}$. Montrer que O la réunion d'une suite croissante de compacts.

19

1) Soient A une partie de $\mathbb{K}$ et O un ouvert de $\mathbb{K}$. Montrer que si A et O sont disjoints, $\overline{A}$ et O le sont aussi.
2) Justifier l'existence du réel $d(A,B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} |a-b|$ pour toutes parties non vides A et B de $\mathbb{K}$.
3) Soient C et C' deux compact non vides disjoints de $\mathbb{K}$. Montrer que $d(C,C') = |c-c'| > 0$ pour certains $c \in C$ et $c' \in C'$.
4) Soient F un fermé non vide et C un compact non vide de $\mathbb{K}$, disjoints. Montrer que $d(F,C) > 0$.
5) Proposer deux fermés non vides disjoints de $\mathbb{C}$ pour lesquels $d(F,F') = 0$.

20

1) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\left\{0\right\}$.
   a) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure α.
   b) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   c) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
   d) Conclusion ?
2) a) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   b) En admettant que π est irrationnel, montrer que $\left\{\sin n \mid \quad n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans $[-1,1]$.
3) a) Soit G un sous-groupe compact de $\mathbb{C}^*$. Montrer que $G \subset \mathbb{U}$, puis que $\left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \quad e^{i\theta} \in G\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

21 On appelle *suite de Cauchy* (*de* $\mathbb{K}$) toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pour laquelle :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1) a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   b) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   c) Réciproquement, montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Cette propriété de $\mathbb{K}$ est appelée sa *complétude*.
2) Soient F un fermé de $\mathbb{K}$ et $f : F \longrightarrow F$ une fonction *contractante*, i.e. pour laquelle :
$$\exists c \in [0,1[, \quad \forall x, y \in F, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant c\,|x-y|.$$
On souhaite montrer que φ possède un et un seul point fixe (*théorème du point fixe de Banach*).
   a) Montrer l'unicité d'un tel point fixe.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque pour laquelle $u_0 \in F$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que $|u_p - u_q| \leqslant c^p \dfrac{|u_1 - u_0|}{1-c}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant p$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   c) En déduire que f possède un point fixe.