## DIVISIBILITÉ, DIVISION EUCLIDIENNE ET CONGRUENCES

**1**

---

**2**

---

**3** Écrire $n$ en fonction de $a_0, \dots, a_r$ et raisonner modulo ce qu'il faut.

---

**4**

1) Au pire, un tableau de congruence. Au mieux…
2) Si $n+1$ divise $n+7$, $n+1$ divise aussi…
3) Faire un tableau de congruence.
4) Identité remarquable.
5) Qui sont les diviseurs positifs et négatifs d'une puissance de 2 ?

---

**5**

1) Tableaux de congruence.

---

**6** Montrer que $p^2-1$ est divisible par 3 et 8 séparément.

---

**7** Formule $a^n - b^n$.

---

**8** Pour tous $n, N \in \mathbb{N}^*$, alors $u_n \leqslant q u_N + u_r$ si on note $q$ le reste de la division euclidienne de $n$ par $N$ et $r$ son reste. À partir de là, revenir à la définition de la limite en distinguant le cas où l'ensemble $\left\{ \frac{u_k}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est minoré de celui où il ne l'est pas.

---

## NOMBRES PREMIERS ET VALUATIONS $p$-ADIQUES

**9** Méditer la preuve de l'infinité de l'ensemble $\mathbb{P}$.

---

**10**

1) a) Factoriser $a^n - 1$.
   b) On sait factoriser $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

---

**11**

1) a) Par l'absurde.
   b) Adapter la preuve de l'infinité de l'ensemble $\mathbb{P}$.

---

**12** Valuations $p$-adiques ! Traiter à part l'entier 0.

---

**13** Valuations $p$-adiques ! Traiter à part l'entier 0.

---

**14** Valuations $p$-adiques ! Traiter à part l'entier 0.

---

**15**

1) Combien d'entiers divisibles par $p^k$ dans $[\![1, n]\!]$ pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ ?

---

**16**

1) Exploiter la factorisation première de $n$ et observer que $[\![1, n-1]\!]$ contient de nombreux diviseurs de $n$.
2) Raisonner par l'absurde et se ramener à la situation de la question **1)**.

---

**17** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est le quotient d'un entier impair par un entier pair pour tout $n \geqslant 2$.

---

**18** Calculer $v_2\big(3^n - 1\big)$ en toute généralité, notamment grâce à la formule $a^n - b^n$. On pourra être amené à comparer $v_2\big(3^n - 1\big)$ et $v_2\big(3^{2^{v_2(n)}} - 1\big)$ et à calculer $v_2\big(3^{2^n} + 1\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

**19**

3) Toute matrice carrée est la somme d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire supérieure stricte et d'une matrice triangulaire inférieure stricte.

---

## PGCD, PPCM ET NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

**20**

---

**21**

---

**22**

2) Que vaut $\displaystyle\binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ?

---

**23**

---

24 **2)** Calculer $(21n-3)\wedge(15n+2)$.

**4)** Procéder comme en **1)** et utiliser **3)** quand ça coince. La relation $(ab)\wedge n = b\wedge n$ supprime $a$, mais le fait surgir aussi si on l'écrit $b\wedge n=(ab)\wedge n$.

---

25

---

26 **2) c)** Récurrence !

---

27 Trois solutions : $\{2\}$, $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\mathbb{N}^*$. Montrer que toute solution $E$ distincte de $\{2\}$ et $\mathbb{N}^*$ contient 2 mais pas 1 et que le plus petit élément de $E\setminus\{2\}$ est impair.

---

## Équations diophantiennes

28 Factoriser d'abord $x$ et $y$ par leur PGCD.

---

29 **4)** Factoriser encore et encore.

---

30 **2) a)** Relation de Bézout !

---

31 Factoriser par 3 encore et encore.

---

32 Par exemple, factoriser $m^3-1$.

---

33 **1) c)** Si le produit de deux entiers naturels premiers entre eux est un carré, chacun d'entre eux en est un aussi.

---

34 Si $x\leqslant y$, montrer que $x$ divise $y$ grâce à leur PGCD.

---

35 Si le produit de deux entiers naturels premiers entre eux est un carré, chacun d'entre eux en est un aussi.

---