

FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE SUR \mathbb{R}

1

2

3

3) Un polynôme, c'est un coefficient dominant, des racines,... et des multiplicités !

4

On sait factoriser $a^2 + b^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

5

- 1) S'intéresser au signe de P au voisinage de toute racine réelle.
- 2) On sait factoriser $a^2 + b^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

6

7

- 1) En notant r le reste de la division euclidienne de n par m , montrer que le reste cherché vaut $X^r - 1$.
- 2) Algorithme d'Euclide !

8

Soient \mathbb{K} un corps et $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $A \wedge B = 1$ si et seulement si $(A + B) \wedge (AB) = 1$.

9

Par récurrence.

10

3) b) S'intéresser à la factorisation irréductible de P sur \mathbb{Q} et exploiter le résultat de la question a).

11

2)3) Un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur \mathbb{K} si et seulement s'il ne possède pas de racine dans \mathbb{K} .

12

1) Par irréductibilité de A , soit $A \mid P$, soit $P \wedge A = 1$.

- 2) Pour la stabilité par inversion, exploiter une relation de Bézout.
- 3) Montrer qu'une certaine famille $(1, \alpha, \alpha^2, \dots)$ est une \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.

13

- 1) Un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur \mathbb{K} si et seulement s'il ne possède pas de racine dans \mathbb{K} .
- 2) a) Combien de polynômes unitaires de degré 2 en tout ?

FRACTIONS RATIONNELLES

14

Raisonnement par l'absurde, introduire une primitive R de $\frac{1}{X}$ et s'intéresser à la multiplicité de 0 dans R — qui est un entier relatif.

15

16

On peut par exemple observer que $X = (X - 1) + 1$.

17

18

19

20

2) Montrer par récurrence que la fonction I_n possède une limite ℓ_n en $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n .

21

22

23

Dériver la décomposition en éléments simples trouvée, puis déterminer les racines de $(X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1}$ au numérateur.

24

1) a) Dériver la décomposition en éléments simples

de $\frac{P'}{P}$.

2) Non !

3) S'intéresser à la fonction $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$.

25

26

1) Décomposer $\frac{(P')'}{P'}$ en éléments simples.

2) Décomposer $\frac{1}{P}$ en éléments simples, puis passer à la limite en $+\infty$.

27

2) a) Simple conséquence de 1)b).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

c) Montrer d'abord que $\binom{2n+1}{n} \geq \frac{2^{2n+1}}{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
