Entiers et (ir)rationnels

1

2

3) Adapter la preuve du résultat analogue démontré en cours.

4) Exploiter l'unicité de la factorisation première.

Équations, inéquations

3

4

5

6

7 Pas de solution si $a < 1$, une et une seule si $a \geqslant 1$.

Inégalités et substitutions

8

9

10

2) Appliquer **1)** judicieusement trois fois et sommer.

11

1) Pour tous $x, y > 0$: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

12

Partie entière

13

1) Écrire x sous la forme $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in [0, 1[$, injecter cette expression de x dans les différentes parties entières proposées, puis distinguer plusieurs cas.

3) L'inégalité $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor < n\sqrt{2}$ est stricte.

4) $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ est coincé entre $\sqrt{4n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$ et il n'y a pas beaucoup d'entiers entre les deux.

Sommes

14

15

16

1) Toute suite croissante majorée converge.

2) Récurrence ! Ensuite, toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

17 Simplification télescopique !

18 Adapter la preuve du résultat analogue démontré en cours pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

19

3) a) Adapter le calcul de la question **1)**. Au cas où vous ne le sauriez pas, $nx^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

b) Re-dériver.

20

21 Récurrence ! Attention de bien remplacer tous les n par des $n+1$ dans l'hérédité.

22 Inégalité de Cauchy-Schwarz !

2) Pour majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+p)^2}$, adapter la majoration $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ proposée dans un autre exercice.

23

24 Développer $\|X+Y\|^2$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

25

PRODUITS

26

27

11) Formuler une conjecture et la démontrer par récurrence.

28

29

2) Récurrence !

30 Transformer le produit de gauche en un produit double et permuter les $\prod$.

31 Le quotient $\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$ est télescopique si on y réfléchit un peu.

32

1) L'inégalité demandée compare deux produits de n termes.

2) Récurrence !

33 Par récurrence, mais les réels $x_1, \ldots, x_n$ doivent-ils être fixés en amont de la récurrence ou introduits dans l'hypothèse de récurrence ?

34

COEFFICIENTS BINOMIAUX

35

4) Par récurrence à partir de la formule de Pascal, mais une récurrence sur n ou sur k ?

36

37

1) Simplifier $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$.

38 Additionner et soustraire.

39

2) **a)** Adapter au choix l'une des techniques de la question **1)** en calculant dans un premier temps la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)$.

b) Formule du capitaine !

40 Forcer l'apparition d'une simplification télescopique. On peut aussi faire une récurrence.

41

42 Partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$, remplacer b_k par sa définition et permuter les $\sum$. Il faudra inventer en passant une formule du genre $\binom{\cdots}{\cdots}\binom{\cdots}{\cdots} = \binom{\cdots}{\cdots}\binom{\cdots}{\cdots}$.