LIPSCHITZIANITÉ

1 Pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$: $\quad xx' - yy- = x(x'-y') + y'(x-x')$.

2

1) Revenir à la définition des intervalles et appliquer en divers points la définition de la lipschitzianité.
2) Montrer que les bornes supérieure/inférieure de E appartiennent à E.

3

2) b) Si ℓ est une valeur d'adhérence, $f(\ell)$ en est une aussi. Après réflexion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède une et une seule valeur d'adhérence.

DÉRIVABILITÉ, POINT DE VUE LOCAL

4 Revenir à la définition du nombre dérivé en tous les points qui posent problème.

5

6

---

7 Faire un dessin et revenir à la définition du nombre dérivé.

---

8 Montrer que $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

CALCULS DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES

9

2) b)c) Décomposer en éléments simples.
3) Formule de Leibniz !

10

---

11 Récurrence !

---

12 Pour la stabilité par composition de l'ensemble étudié E, montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall f, g \in E, \quad (g \circ f)^{(n)} \geqslant 0.$$

---

13 On finit par trouver $x \longmapsto \dfrac{(n-1)!}{x}\left(1 - \dfrac{1}{(1+x)^n}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ grâce à la formule de Leibniz.

---

14 Exprimer $x \longmapsto x^n \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en fonction de $x \longmapsto x^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, puis appliquer la formule de Leibniz.

---

15 Simplifier en amont $\cos \operatorname{Arctan} x$ et $\sin \operatorname{Arctan} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

16 Appliquer le théorème des accroissements finis, puis majorer/minorer.

17

18

19

2) Montrer d'abord que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\ell - \dfrac{1}{4}, \ell + \dfrac{1}{4}\right]$.

20

21

22

1) Penser multiplicité.
2) Appliquer le théorème de Rolle jusqu'à épuisement.

23

1) b) Penser multiplicité.

24

25

26

2) Montrer que si P n'est pas constant, alors :

$$Q(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

27 Adapter la preuve du théorème de la limite de la dérivée en appliquant le théorème des accroissements finis et en revenant à la définition de la limite.

28 S'intéresser aux réels $\frac{k}{n}$, k décrivant $[\![0,n]\!]$.

29 L'ensemble étudié est borné et les dérivées successives d'une fonction qui s'annule une infinité de fois s'annulent chacune une infinité de fois.

30

31

32

2) **a)** Appliquer **1)** à une primitive de f.

b) Sommer **a)** et réorganiser.

33

1) Adapter les preuves des exercices précédents.

Limite de la dérivée

34 La fonction $x \longmapsto f\left(\sqrt{x}\right)$ a toutes les propriétés requises.

35

2) Les premières dérivées de la fonction $x \longmapsto x^{n+1} \ln|x|$ ont une forme générale très simple.

36

1) **a)** Récurrence !

b) Par récurrence à partir de la version $\mathscr{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée.

2) **b)** Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-\infty, n+\frac{1}{2}\right[$:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} g\big(2^k(x-k)\big).$$

c) Pour montrer que H est majorée, partir de l'égalité $H(x) = H(0) + \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et exploiter l'indication de la question **b)**.

37

Inégalités de convexité

38

39

40

41 Étudier la convexité de $x \longmapsto x \ln x$.

42

43

44

2) Appliquer bêtement l'inégalité de Jensen à la fonction de la question **1)** avec des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ simples, puis comparer avec le résultat attendu.

45

2) Appliquer bêtement l'inégalité de Jensen à la fonction de la question **1)** avec des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ simples, puis comparer avec le résultat attendu.

3) Curieusement, **3)** est un cas particulier de **2)**.

Convexité, sécantes et tangentes

46

47

48 Écrire la définition de la convexité sur $[a,b[$ et passer soigneusement à la limite.

49

50 Fixer deux réels a et b pour lesquels $a < b$, représenter le graphe de f et la sécante associée aux points d'abscisses a et b sur une même figure, puis méditer.

51

52

1) Passer à la limite dans l'inégalité des pentes.

2) **a)** Si on ne sait pas faire, on peut au moins justifier l'existence de la limite.

53

4) Dans le cas où Z est majoré de borne supérieure s, déterminer une expression explicite de f au voisinage de s à gauche et au voisinage de s à droite.

54

55

56

2) Le théorème de la limite de la dérivée peut aider.

3) On pourra commencer par introduire deux réels $\alpha, \beta \in I$ pour lesquels $\alpha < a < b < \beta$.

57

2) Si on ne sait pas faire, on peut au moins justifier l'existence de la limite.

58

Montrer que pour tous $x, y \in I$, l'ensemble :
$$\Big\{\lambda \in [0,1] \mid \quad f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\Big\}$$
est à la fois fermé et stable par passage au milieu.